משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

10 במאי 2017

משוואת אוילר הומוגנית

מדובר במשוואה

$$\alpha x^2 y''(x) + \beta x y'(x) + \gamma y = 0$$

ראינו שמספיק לפתור עבור $x > 0$, והצבנו $x = e^t$. אז $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. אז נקבל

$$\begin{aligned} y_t &= x y'(x) \\ y_{tt} &= x^2 y''(x) + y_t \end{aligned}$$

לכן המשוואה הופכת להיו

$$\alpha y_{tt}(t) + (\beta - \alpha) y_t(t) + \gamma y(t) = 0$$

זו משוואה במקדמים קבועים. אנחנו יודעים לפתור את זה! מנחשים פתרון מהצורה $y = e^{rt}$. המשוואה האופיינות היא

$$\alpha r^2 + (\beta - \alpha) r + \gamma$$

ואז

$$\Delta = (\beta - \alpha)^2 - 4\gamma\alpha$$

אם $\Delta > 0$ מקבלים שני שורשים ממשיים, אם $\Delta = 0$ יש שורש ממשי כפול, ואם $\Delta < 0$ מקבלים שני שורשים $\lambda_{1,2} = \lambda \pm i\mu$ מרוכבים. נשים לב שמתקיים

$$y = e^{rt} = \left(e^t\right)^r = x^r$$

כלומר ניתן היה לקבל את המשוואה האופיינית ישירות על ידי הצבת x^r במשוואה.

1. אם $\Delta > 0$, נקבל

$$y(x) = c_1 |x|^{r_1} + c_2 |x|^{r_2}$$

כאשר r_1, r_2 השורשים הממשיים.

2. אם $\Delta = 0$, נקבל

$$y(x) = c_1 |x|^{r} + c_2 |x|^{r} \ln |x|$$

כאשר r הוא השורש הממשי הכפול.

3. אם $\Delta < 0$, נקבל

$$y(x) = c_1 |x|^{\lambda} \cos(\mu \ln |x|) + c_2 |x|^{\lambda} \sin(\mu \ln |x|)$$

כאשר $r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$ השורשים המרוכבים.

1 משוואות לינאריות לא הומוגניות מסדר 2

אנחנו מתבוננים במשוואה

$$L[y] = y'' + p(x) y' + q(x) y = g(x)$$

נתבונן במשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$L[u] = u'' + p(x) u' + q(x) u = 0$$

למה 1.1 פתרון כללי של המשוואה הלא הומוגנית ניתן להשיג על ידי חיבור של פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית ופתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית. פורמלית - אם $y_p(x)$ פתרון פרטי אחד של המשוואה הלא הומוגנית, $u(x)$ הצורה הכללית (דו פרמטרית) של פתרון של המשוואה ההומוגנית, אזי כל פתרון של המשוואה הלא הומוגנית נראה כמו

$$y(x) = y_p(x) + u(x)$$

הוכחה: נראה כי $y = y_p + u$ פתרון.

$$L[y] = L[y_p + u] = L[y_p] + L[u] = g(x) + 0 = g(x)$$

בכיוון השני, נניח כי $\tilde{y}$ פתרון. לכן, $L(\tilde{y}) = g$, ונרצה להראות כי $\tilde{y} = y_p + u'$, כאשר u' פתרון של המשוואה ההומוגנית. מתקיים

$$L[u'] = L[\tilde{y} - y] = L[\tilde{y}] - L[y] = g - g = 0$$

ולכן סיימנו. ■

מסקנה 1.2 אם $y_p, \tilde{y}_p$ פתרונות של המשוואה הלא הומוגנית, אזי ההפרש ביניהם הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית.

כדי למצוא פתרון כללי של המשוואה הלא הומוגנית, נמצא פתרון פרטי ואת הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית.

כדי למצוא פתרון פרטי, נוכל להשתמש בעקרון הסופרפוזיציה.

למה 1.3 אם רוצים לפתור את $L[y] = g(x)$, ואם

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$$

וביכולתנו למצוא פתרונות פרטיים $\left(y_p^i\right)_{i=1}^n$ של $(g_i)_{i=1}^n$, אזי נקבל פתרון פרטי

$$y_p = \sum_{i=1}^{n} y_p^i$$

הוכחה:

$$L[y_p] = L\left[\sum_{i=1}^{n} y_p^i\right] = \sum_{i=1}^{n} L\left[y_p^i\right] = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) = g(x)$$

■

1.1 שיטות למציאת פתרונות פרטיים

נלמד שלוש שיטות:

1. שיטת המקדמים הלא ידועים - הכי קלה, עובדת רק במקרים מסויימים.
2. ואריאציית הפרמטרים - עובדת "תמיד", קשה יותר מהראשונה.
3. פונקצית גרין - כמו הקודמת.

1.1.1 שיטת המקדמים הלא ידועים

המקרה הכללי ביותר שניתן לפתור בשיטה זו הוא

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

כאשר a, b, c קבועים, וכן

$$g(x) = \begin{cases} p_n(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ p_n(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{cases}$$

כאשר p_n פולינום ממעלה n.
מקרה ראשון:

$$g(x) = p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

נחפש פתרון מהצורה

$$y_p = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i$$

נציב זאת ונחפש את המקדמים:

$$a\sum_{i=2}^{n} i(i-1) A_{i-2} x^{i-2} + b\sum_{i=1}^{n} i A_{i-1} x^{i-1} + c\sum_{i=0}^{n} A_i x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

נשווה מקדמים של חזקות של x משני הצדדים:

$$\begin{aligned} cA_n &= a_n \\ bnA_{n-1} + cA_{n-1} &= a_{n-1} \\ a \cdot (i+1)(i+2) A_i + b(i+1) A_i + cA_i &= a_i \end{aligned}$$

יש לפתור את כל אלה. את זה ניתן לעשות רק אם $c \neq 0$. אם $c = 0$, $b \neq 0$, הפולינום באגף שמאל הוא רק ממעלה $n-1$. כדי "לתקן" ניקח

$$y_p = x\sum_{i=0}^{n} A_i x^i$$

וכאן אין מקדם חופשי. מדוע זה? כי קבוע פותר את הבעיה ההומוגנית - אז להוסיף קבוע יישמור את היות y_p פתרון.
אם $b = c = 0$, ניקח $y_p = x^2 (A_n x^n + A_0)$ ונשווה מקדמים. במקרה זה, $b_1 x + b_0$ הוא פתרון של הבעיה ההומוגנית, ולכן לא חייב להיכלל בתוך y_p.

מסקנה 1.4 נתונה המשוואה $L[y] = p_n(x)$ עם $L = aD^2 + bD + c$, כאשר $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. אזי למשוואה זו קיים פתרון פרטי מהצורה

$$y_p(x) = x^s q_n(x)$$

כאשר $q_n(x)$ פולינום מאותה מעלה כמו $p_n(x)$, s הוא הריבוי של 0 כשורש של הפולינום האופייני $l(r) = ar^2 + br + c$. נדגיש כי

$$x^s q_n(x) \neq q_{n+s}(x)$$

דוגמא מצא פתרון פרטי וכללי של

$$y'' + 3y' = 6x$$

הפולינום האופייני הוא

$$l(r) = r^2 + 3r = r(r+3)$$

0 הוא שורש מריבוי 1. לפי השיטות שראינו הכל קל (נשאיר כתרגיל).

מקרה שני:

$$g(x) = e^{\alpha x} p_n(x)$$

עבור α קבוע (ממשי או מרוכב). נציב $y = e^{\alpha x} z(x)$ ונקבל

$$az''(x) + (2a\alpha + b) z' + \left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) z = p_n(x)$$

לכן קיבלנו על z משוואה מהמקרה הראשון. אם $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$, נקבל

$$z_p(x) = q_n(x)$$
$$y_p(x) = e^{\alpha x} q_n(x)$$

אם $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ אבל $2a\alpha + b \neq 0$, אז

$$z_p(x) = x q_n(x)$$
$$y_p(x) = x e^{\alpha x} q_n(x)$$

ואם $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ וגם $2a\alpha + b = 0$, אז

$$z_p(x) = x^2 q_n(x)$$
$$y_p(x) = x^2 e^{\alpha x} q_n(x)$$

נשים לב שאם נסמן שוב $l(\alpha)$ את הפולינום האופייני, המשוואה על z היא למעשה

$$az'' + l'(\alpha) z' + l(\alpha) z = p_n(x)$$

מסקנה 1.5 נתונה המשוואה $L[y] = e^{\alpha x} p_n(x)$ עם $L = aD^2 + bD + c$, כאשר $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. אזי למשוואה זו קיים פתרון פרטי מהצורה

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x} q_n(x)$$

כאשר $q_n(x)$ פולינום מאותה מעלה כמו $p_n(x)$, s הוא הריבוי של 0 כשורש של הפולינום האופייני $l(r) = ar^2 + br + c$.

מקרה שלישי:

$$g(x) = e^{\alpha x} p_n(x) \cos(x)$$
$$g(x) = e^{\alpha x} p_n(x) \sin(x)$$

עבור α, β קבועים. נביא את זה למקרה השני, למשל

$$e^{\alpha x} p_n(x) \cos(\beta x) = p_n(x) \frac{e^{(\alpha + i\beta)x} + e^{(\alpha - i\beta)x}}{2}$$

ולכן

$$y_p(x) = x^s e^{(\alpha + i\beta)} q_n(x) + x^s e^{(\alpha - i\beta)} r_n(x)$$

כאשר q_n, r_n פולינום מאותה מעלה כמו p_n, $s = 0$ אם $\alpha \pm i\beta$ הם לא השורשים של הפולינום האופייני, $s = 1$ אם הם כן.
ניתן לכתוב את y_p גם כפיתרון ממשי:

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x} \tilde{q}_n(x) \cos(\beta x) + x^s e^{\alpha x} \tilde{r}_n(x) \sin(\beta x)$$

דוגמא ניקח $g(x) = x \sin x + 2 \cos x$. אזי נקבל

$$y_p(x) = (A_1 x + A_0) \sin x + (B_1 x + B_0) \cos x$$

כאשר מניחים כי $\sin x, \cos x$ אינם פתרונות של המערכת ההומוגנית.

אוצילטורים פיזיקליים

נניח שיש לנו משקולת, שנמצאת במיקום u_0 בזמן 0, ומחוברת לקפיץ. המשקולת בעלת מאסה m, ולקפיץ קבוע k, כלומר $F=-ku$ הכח של הקפיץ (חוק הוק). כעת, נפעיל את החוק השני של ניוטון:

$$mu''(t)=-ku(t)$$
$$mu''+ku=0$$

עם תנאי התחלה $u(0)=u_0$, $u'(0)=u'_0$. נגדיר

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

ואז נקבל

$$u''+\omega_0^2u=0$$
$$l(r)=r^2+\omega_0^2=0$$

שורשיו:

$$r=\pm i\omega_0$$

כלומר הפתרונות הכללים הם

$$u=A\cos(\omega_0t)+B\sin(\omega_0t)$$

לכן הפתרון מחזורי לכל תנאי התחלה, עם זמן מחזור

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

שלא תלוי בתנאי ההתחלה.
נוסיף חיכוך: $F_D=-cu'(t)$, כאשר $c>0$. עכשיו התנועה נתונה על ידי

$$mu''=-ku+cu'$$
$$mu''-cu'+ku=0$$

אינטואיטיבית:

1. אם החיכוך מאוד גדול המסה נעה לכיוון נקודת שיווי משקל כלשהי, ושם עוצרת (ראינו כבר במקרה של משוואה מסדר ראשון).
2. אם החיכוך קטן, התנועה היא "כמעט מחזורית", כלומר האוסילציות הולכות וקטנות לאיטן.