משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

ⓒ ארזים

3 במאי 2017

1 משוואות מסדר שני

ראינו שני סוגים של משוואות מסדר שני:

1. נותנים שני תנאי התחלה באותה נקודה, כלומר בעיית תנאי התחלה:

$$y\left(x_0\right) = y_0$$
$$y'\left(x_0\right) = y'_0$$

לבעיה זו ראינו משפט קיום ויחידות.

2. נותנים שני תנאי שפה בשתי נקודות שונות, כלומר בעיית תנאי שפה:

$$y\left(x_0\right) = y_0$$
$$y\left(x_1\right) = y_1$$

כאן לא ראינו שום משפטים.

דוגמאות ראשית נדון במערכת

$$y'' + y = 0$$
$$y\left(0\right) = 0$$
$$y'\left(0\right) = 1$$

אפשר לנחש: $y = \sin x, \cos x$ מקיימות את המשוואה הדיפרנציאלית, $\sin$ מקיימת את תנאי ההתחלה, ולכן זהו פתרון של בעיית תנאי ההתחלה. זה גם הפתרון היחיד - בגלל משפט קיום ויחידות.

דוגמא כעת נתבונן במערכת

$$y'' + y = 0$$
$$y\left(0\right) = y\left(\pi\right) = 0$$

כאן, כל פונקציה מהצורה $y = c\sin x$ תהיה פתרון. זה בסדר שאין יחידות - זו בעיית שפה, ולא בעיית התחלה.

אנחנו נדון בעיקר בבעיות תנאי התחלה.

1.1 פתרון משוואה לינארית מסדר 2

המשוואה הכללית היא

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = g(x)$$

חשוב לדון במשוואה ההומוגנית המתאימה, בה $g = 0$.

תזכורת למשוואות הללו קיים פתרון יחיד בתחום שבו המקדמים p, q, g הם רציפים.

נסמן

$$L[y] \coloneqq y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y$$

זהו אופרטור דיפרנציאלי.

טענה 1.1 L הוא אופרטור לינארי, כלומר

$$\begin{aligned} L[u+v] &= L[u] + L[v] \\ L[cu] &= cL[u] \end{aligned}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} L[u+v] &= (u+v)'' + p(u+v)' + q(u+v) = \\ &= u'' + pu' + qu + v'' + pv' + qv = L[u] + L[v] \\ L[cu] &= (cu)'' + p(cu)' + q(cu) = cu'' + cpu' + cqu = cL[u] \end{aligned}$$

■

משפט 1.2 (עקרון הסופרפוזיציה) אם $y_1, \dots, y_k$ פתרונות של המשוואה ההומוגנית, אזי הקומביציה הלינארית $y = \sum c_i y_i$ כאשר $\{c_i\}$ קבועים היא גם פתרון של המשוואה ההומוגנית. כלומר, אוסף הפתרונות של משוואה לינארית הומוגנית הוא מרחב לינארי.

הרווחנו את הזכות להפעיל כלים של אלגברה לינארית.

הגדרה 1.3 הפונקציות $\{y_i(x)\}_{i=1}^{k}$ נקראות תלויות לינארית בתלום I אם קיימים קבועים $\{c_i\}_{i=1}^{k}$ שלא כולם אפס כך שלכל $x \in I$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{k} c_i y_i(x) = 0$$

אחרת, הפונקציות נראות בלתי תלויות לינארית בתחום I.

דוגמא $\{\sin x, 3\sin x\}$ תלויות לינארית, כי

$$3\sin x - 3\sin x = 0$$

דוגמא האם e^x, e^{2x} תלויות לינארית? נניח שקיימים c_1, c_2 עם

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} = 0$$

בפרט, קיימים $x_1 \neq x_2$ ששניהם מקיימים זאת, ועל כן נוכל לכתוב זאת במטריצה:

$$\begin{pmatrix} e^{x_1} & e^{2x_1} \\ e^{x_2} & e^{2x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

קיים פתרון לא טריוויאלי אם ורק אם הדטרמיננטה של המטריצה היא 0, אבל חישוב פשוט מראה שהיא

$$e^{x_1+2x_2} - e^{2x_1+x_2} = e^{x_1+x_2}\left(e^{x_1} - e^{x_2}\right)$$

שני הגורמים שונים מאפס, ולכן הדטרמיננטה לא מתאפסת. לכן אין כאלה c_1, c_2, ולכן הפונקציות בלתי תלויות לינארית.

דוגמא נתבונן בפונקציות $x, |x|$. אלה תלויות לינארית בכל תחום שכולו מצד אחד של 0, ובלתי תלויות בכל תחום שנמצא בשני צידי 0.

הערה 1.4 במקרה של שתי פונקציות, הן תלויות לינארית אם ורק אם הן פרופורציוניות, משמע $y_1 = cy_2$.

הגדרה 1.5 נתונה המשוואה הלינארית ההומוגנית שעליה דיברנו. קבוצת הפונקציות $\{y_i(x)\}_{i=1}^k$ תקרא <u>מערכת בסיסית</u> או <u>מערכת יסודית</u> בתחום I אם:

1. כל $y_i(x)$ פתרון של המשוואה בתחום I.
2. $\{y_i(x)\}_{i=1}^k$ בלתי תלויות בתחום I.
3. כל פתרון של המערכת בתחום I הוא צירוף לינארי של $\{y_i(x)\}_{i=1}^k$.

משפט 1.6 נתונה המשוואה הלינארית ההומוגנית מסדר שני. אם p, q רציפות בקטע I, אזי קיימת למשוואה מערכת בסיסית בת שני פתרונות (כלומר מימד מרחב הפתרונות הוא 2).

הוכחה: יהי $x_0 \in I$. ממשפט קיום ויחידות למשוואה לינארית נובע שקיים פתרון יחיד בקטע I עבור תנאי ההתחלה

$$y_1(x_0) = 1$$
$$y_1'(x_0) = 0$$

באופן דומה קיים פתרון יחיד בקטע I עבור תנאי ההתחלה

$$y_2\left(x_0\right)=0$$
$$y_2'\left(x_0\right)=1$$

נרצה לטעון שאלה בלתי תלויים לינארית. נניח כי

$$c_1y_1+c_2y_2=0$$

נגזור ונקבל

$$c_1y_1'+c_2y_2'=0$$

נציב x_0 בשתי המשוואת ונקבל

$$c_1=c_2=0$$

כעת, יהי y פתרון של המשוואה. נרצה למצוא קבועים c_1,c_2 המקיימים $y=c_1y_1+c_2y_2$. נגדיר $\tilde{y}=y\left(x_0\right)y_1+y'\left(x_0\right)y_2$. ברור שזהו פתרון של המשוואה, ושהוא מקיים

$$\tilde{y}\left(x_0\right)=y\left(x_0\right)$$
$$\tilde{y}'\left(x_0\right)=y'\left(x_0\right)$$

ממשפט קיום ויחידות נובע $\tilde{y}=y$ וסיימנו. ■

כעת, נתונים פתרונות y_1,y_2 של המשוואה. נרצה לבדוק האם $\{y_1,y_2\}$זו קבוצה בסיסית.
יהי y פתרון של המערכת. נבדוק האם $\{y_1,y_2\}$ פורשת את מרחב הפתרונות, כלומר נחפש c_1,c_2 המקיימים $y=c_1y_1+c_2y_2$. אם קיימים קבועים כאלה, בפרט מתקיים

$$c_1y_1\left(x_0\right)+c_2y_2\left(x_0\right)=y\left(x_0\right)$$
$$c_1y_1'\left(x_0\right)+c_2y_2'\left(x_0\right)=y'\left(x_0\right)$$

הערכים $y\left(x_0\right),y'\left(x_0\right)$ יכולים לנוע בחופשיות, ולכן קיימים c_1,c_2 כאלה לכל פתרון אם ורק אם המטריצה $\begin{pmatrix}y_1\left(x_0\right) & y_2\left(x_0\right)\\ y_1'\left(x_0\right) & y_2'\left(x_0\right)\end{pmatrix}$ היא הפיכה, כלומר הדטרמיננטה שלה לא אפס.

הגדרה 1.7 הוורונסקיאן של $\{y_1,y_2\}$ הוא בדיוק הדטרמיננטה של המטריצה האחרונה:

$$W\left(y_1,y_2\right)\left(x\right)=\begin{vmatrix}y_1\left(x\right) & y_2\left(x\right)\\ y_1'\left(x\right) & y_2'\left(x\right)\end{vmatrix}$$

לכן, הוכחנו למעשה כי $\{y_1, y_2\}$ מערכת יסודית בקטע I אם ורק אם קיימת נקודה $x \in I$ עבורה $W(y_1, y_2)(x) = 0$. ניתן להכליל בקלות עבור משוואה לינארית מסדר n.

דוגמא $y'' + y = 0$. $y = \sin x, \cos x$ פתרונות. נשים לב שהם מערכת יסודית ־ גם כי הם לא פרופורציוניים, וגם כי הוורונסקיאן קבוע על -1.

דוגמא נפתור את $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$. נחפש פתרונות מהצורה $y = x^p$.

$$2x^2p(p-1)x^{p-2} + 3xpx^{p-1} - x^p = 0$$
$$x^p\left(2p^2 + p - 1\right) = 0$$

נקבל $p = \frac{1}{2}$ או $p = -1$. זה נותן מערכת יסודית ־ הוורונסקיאן הוא $-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

כדי לדעת אם $\{y_1, y_2\}$ היא קבוצה פורשה, יש למצוא x_0 עבורו $W(x_0) \neq 0$. נניח שזה וביטוי מסובך ־ איך נעשה זאת?
ניתן תשובה אלגנטית.

משפט 1.8 אם p, q רציפות בקטע I, u_1, u_2 פתרונות של המערכת ההומוגנית בתחום I. אזי $W(u_1, u_2)$ הוא זהותית אפס, או שאינו מתאפס כלל.

הוכחה: מתקיים

$$u_1'' + pu_1' + qu_1 = 0$$
$$u_2'' + pu_2' + qu_2 = 0$$

נכפול את המשוואה הראשונה פי u_2 ואת השנייה פי u_1, ונחסר:

$$u_2u_1'' - u_1u_2'' + p(u_1'u_2 - u_1u_2') = 0$$

נשים לב שכאן כתוב למעשה, אם נסמן $W = W(u_1, u_2)$,

$$-W' - pW = 0$$

קיבלנו

$$W + pW = 0$$

הפתרון הוא נוסחת אבל:

$$W(x) = ce^{-\int^x p}$$

לכן $c \neq 0$ אם ורק אם $W(x) \neq 0$ לכל x, $c = 0$ אם ורק אם $W(x) = 0$ לכל x. ■

מנוסחת אבל נקבל את המסקנות הבאות.

מסקנה 1.9 W קבוע אם ורק אם $p=0$, כלומר המשוואה היא מהצורה $y''+q\left(x\right)y=0$.

מסקנה 1.10 אם u_1,u_2 פתרונות וגם u_3,u_4 פתרונות, אז קיים c המקיים

$$W\left(u_1,u_2\right)=cW\left(u_3,u_4\right)$$

מסקנה 1.11 u_1,u_2 מערכת יסודית של המשוואה בקטע I אם ורק אם $W\left(u_1,u_2\right)\equiv 0$.

סיכום אם $\{u_1,u_2\}$ פתרונות של המשוואה ההומוגנית אזי התנאים הבאים שקולים.

1. $\{u_1,u_2\}$מערכת יסודית של פתרונות.
2. $\{u_1,u_2\}$ בלתי תלויים לינארית.
3. $W\left(u_1,u_2\right)\left(x\right)\neq 0$ בנקודה כלשהי x.
4. $W\left(u_1,u_2\right)\left(x\right)\neq 0$ בכל נקודה x.

1.2 פתרון משוואה הומוגנית מסדר 2

1.2.1 שיטת הורדת הסדר

מתבוננים במשוואה

$$y''+py'+qy=0$$

נניצ שמצאנו פתרון לא טריוויאלי $y_1\left(x\right)$. נראה איך ניתן באמצעותו למצוא פתרון שני בלתי תלוי בו. נציב במשוואה שלנו פתרון מהצורה $y\left(x\right)=v\left(x\right)y_1\left(x\right)$.

$$\begin{aligned}y'&=v'y_1+vy_1'\\ y''&=v''y_1+2v'y_1'+vy_1''\end{aligned}$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned}v''y_1+2v'y_1'+vy_1''+pv'y_1+pvy_1'+qvy_1&=0\\ v''y_1+v'\left(2y_1'+py_1\right)+v\left(\underbrace{y_1''+py_1'+qy_1}_{0}\right)&=0\\ v''y_1+v'\left(2y_1'+py_1\right)&=0\end{aligned}$$

קיבלנו את המשוואה הבאה:

$$v''+\left(p+\frac{2y_1'}{y_1}\right)v'=0$$

וזו משוואה מסדר ראשון (בפונקציה v'). מקבלים

$$v' = ce^{-\int^x \left(p+2\frac{y_1'}{y_1}\right)} = \frac{c}{y_1^2\left(x\right)}e^{-\int^x p}$$

אנחנו מחפשים פתרון אחד, אז נציב $c=1$. אם כאן, נקבל פתרון מהצורה (שוב בחרנו ערך של קבוע כי מחפשים רק פתרון אחד):

$$v\left(x\right) = \int^x \frac{e^{-\int p}}{y_1^2\left(x\right)}$$

נשים לב שפונקציה זו לא קבועה כי היא אינטגרל על פונקציה שאינה 0. לכן y_1, vy_1 מערכת יסודית.