אנליזה נומרית 1

© ארזים

1 ביוני 2017

1 אינטגרפולציה

הבעייה שלנו היא כזו: בהינתן פונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ואוסף של $n+1$ נקודות $a\le x_0<\cdots<x_n\le b$ נרצה למצוא פולינום ממעלה n לכל היותר שמסכים עם f בכל הנקודות x_i.

משפט 1.1 קיים ויחיד פולינום כזה.

הוכחה: ראינו בשיעור - בונים מערכת לינארית עם מטריצת ון דר מונד. ∎

1.1 צורת לגראנז'

החיסרון במערכת עם ון דר מונד היא שהעלות לפתרון היא $O\left(n^3\right)$. נראה כעת דרך נוספת: נבחר את בסיס לגראנז'

$$L_i\left(x\right)=\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

התכונה החשובה היא $L_i\left(x_j\right)=\delta_{i,j}$. נעיר שזה בסיס כי יש $n+1$ פולינומים כאלה, והם בלתי תלויים לינארית, בגלל שאם

$$\sum\mu_jL_j\left(x\right)=0$$

נציב x_j ונקבל

$$\mu_j=0$$

נרצה כעת להציג

$$p\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}c_iL_i\left(x\right)$$

אם נציב x_j נקבל

$$f\left(x_j\right)=p\left(x_j\right)=c_j$$

ולכן בסך הכל

$$p\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}f\left(x_j\right)L_j\left(x\right)$$

תרגיל הוכיחו כי לכל $n \geq 1$ ולכל $a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$ מתקיים

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$$

פתרון נגדיר פולינום/פונקציית עזר $f(x) = 1$. מצד אחד, האינטרפולציה שלה היא

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x)$$

אבל היא גם פולינום ממעלה 0, ויש לנו נקודה 1 לפחות, ולכן פולינום האינטרפולציה שלה הוא היא עצמה. לכן קיבלנו

$$1 = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)$$

תרגיל נגדיר את שגיאת האינטרפולציה

$$e(x) = f(x) - p(x)$$

הראו שניתן לכתוב

$$e(x) = \sum_{i=0}^{n} (f(x) - f(x_i)) L_i(x)$$

פתרון נכתוב

$$\begin{aligned} e(x) &= f(x) - p(x) = \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(x) L_i(x) - \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) = \\ &= \sum_{i=0}^{n} (f(x) - f(x_i)) L_i(x) \end{aligned}$$

תרגיל נניח שהפונקציה זוגית, מספר הנקודות זוגי, והן ממוקמות באופן סימטרי סביב הראשית. הראו כי $p(x)$ פולינום זוגי.

פתרון נכתוב

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) L_k(x) + \sum_{k=-n}^{-1} f(x_k) L_k(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) L_k(x) + f(-x_k) L_{-k}(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) (L_k(x) + L_{-k}(x)) \end{aligned}$$

יש להוכיח רק עבור k כלשהו זוגיות של $L_k(x)+L_{-k}(x)$. נכתוב

$$L_k(-x)=\prod_{j\neq k}\frac{(-x-x_j)}{(-x_k-x_j)}=\prod_{j\neq k}\frac{-(x-x_{-j})}{-(x_{-k}-x_{-j})}=\prod_{j\neq k}\frac{(x-x_{-j})}{(x_{-k}-x_{-j})}=L_{-k}(x)$$

לכן נקבל

$$L_k(-x)+L_{-k}(-x)=L_{-k}(x)+L_k(x)$$

וזו זוגיות בדיוק כמו שרצינו.

1.2 צורת ניוטון

צורת לגראנז' לא נוחה לחישובים. נעבוד עם בסיס ניוטון

$$1,x-x_0,\dots,\prod_{j=0}^{n-1}(x-x_j)$$

ואז צורת ניוטון היא

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(f[x_0,\dots,x_i]\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)\right)$$

המקדמים נקראים הפרשים מחלוקים. מתקיים $f[x_0]=f(x_0)$ ואז

$$f[x_0,\dots,x_k]=\frac{f[x_1,\dots,x_k]-f[x_0,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

ואז אפשר לבנות אותם רקורסיבית בטבלה.

תרגיל הראו כי מתקיים

$$f[x_0,\dots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\varphi'_{n+1}(x_i)}$$

כאשר

$$\varphi_{n+1}(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

פתרון נגדיר

$$\psi_j(x)=\prod_{i\neq j}(x-x_i)$$

מכלל לייבניץ נקבל

$$\varphi'_{n+1}(x)=\sum_{j=0}^{n}\psi_j(x)$$

ובפרט

$$\varphi_{n+1}'(x_i) = \sum_{j=0}^{n} \psi_j(x_i) = \psi_i(x_i)$$

וזהו המכנה בפולינום $L_i(x)$. כעת, מצד אחד, $f[x_0, \ldots, x_n]$ הוא המקדם של החזקה המובילה בפולינום האינטרפולציה (מצורת ניוטון). מהצד השני, מצורת לגראנז', המקדם של החזקה המובילה בפולינום האינטרפולציה הוא

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\varphi_{n+1}'(x_i)}$$

ולכן סיימנו.