# אנליזה נומרית 1

ארזים ©

18 במאי 2017

## 1 שיטת Conjugate Gradients

בהינתן $A$ סימטרית מוגדרת חיובית נרצה לפתור את $Ax = b$. בשיטת Conjugate Directions, רצינו לבצע איטרציות מהצורה

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i$$

כאשר $d_0, \dots, d_{n-1}$ הם כיוונים $A$ אורתוגונליים. דרשנו כי $e_i$ יהיה אורתוגונלי לכל $d_j$ עבור $i > j$. הצורה של $\alpha_i$ היא

$$\alpha_i = \frac{\langle r_i, d_i \rangle}{\langle Ad_i, d_i \rangle}$$

כאשר $e_i = x_i - x$, $r_i = b - Ax_i = -Ae_i$. כדי למצוא כיוונים טובים נבצע גרם־שמידט - נתחיל מווקטורים $u_0, \dots, u_{n-1}$ בלתי לויים ונגדיר

$$d_j = u_j + \sum_{k=0}^{j-1} \beta_{j,k} d_k$$

כאשר $\beta_{j,k}$ מחושבים על ידי הדרישה $\langle Ad_j, d_k \rangle = 0$. מה העלות של זה? $O\left(n^3\right)$ - צריך לזכור בכל שלב את כל הווקטורים הקודמים ולהטיל עליהם.

ההבדל כשעוברים לשיטת Conjugate Gradients הוא בחירה נבונה של $u_0, \dots, u_{n-1}$. כלל האצבע הוא

$$u_j = r_j$$

**עובדה** כאשר $j < i$ מתקיים

$$0 = \langle Ae_i, d_j \rangle = -\langle r_i, d_j \rangle$$

ועל כן $d_j \perp r_i$ כאשר $j < i$.

**עובדה** נגדיר

$$d_j = r_j + \sum_{k=0}^{j-1} \beta_{j,k} d_k$$

ואז

$$0 = \langle r_i, d_j \rangle = \langle r_i, r_j \rangle + \sum_{k=0}^{j-1} \beta_{j,k} \langle r_i, d_k \rangle = \langle r_i, r_j \rangle$$

ועל כן מתקיים $r_i \perp r_j$.

**עובדה** כאמור

$$\beta_{j,l} = -\frac{\langle Ad_l, r_j \rangle}{\langle Ad_1, d_1 \rangle}$$

נרצה לבחון מתי זה מתאפס. ננתח את המונה.

$$r_{l+1} = -Ae_{l+1} = -A\left(e_l + \alpha_l d_l\right) = r_l - \alpha_l A d_l$$

לכן

$$\begin{aligned} \langle r_{l+1}, r_j \rangle &= \langle r_l, r_j \rangle - \alpha_l \langle Ad_l, r_j \rangle \\ \alpha_l \langle Ad_l, r_j \rangle &= \langle r_l, r_j \rangle - \langle r_{l+1}, r_j \rangle \end{aligned}$$

אגף ימין מתאפס לכל $j \neq l, l+1$ מאורתוגונליות. לכן

$$\langle Ad_l, r_j \rangle = \begin{cases} \frac{\langle r_j, r_j \rangle}{\alpha_j} & j = l \\ \frac{\langle r_j, r_j \rangle}{\alpha_{j-1}} & j = l+1 \\ 0 & o/w \end{cases}$$

**עובדה** שוב

$$\beta_{j,k} = -\frac{\langle Ad_l, r_j \rangle}{\langle Ad_l, d_l \rangle}$$

כאשר $l \leq j-1$, כלומר $j \geq l+1$. לכן, עבור $j$ נתון צריך לזכור רק את $\beta_{j+1,j}$ (שלב אחדה אחורה). קיבלנו

$$\beta_{j,l} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{j-1}} \frac{\langle r_l, r_j \rangle}{\langle Ad_l, d_l \rangle} & j = l+1 \\ 0 & o/w \end{cases}$$

ואת הביטוי הזה אפשר לייפות עוד יותר.

לבסוף מקבלים אלגוריתם:

| Conjugate Gradients | **אלגוריתם 1** |
|---|---|

Conjugate Directions:
$x_0 = 0, r_0 = d_0 = b - Ax_0$
for $i = 1, \dots, n$:
$\alpha_i = \frac{\langle r_i, d_i \rangle}{\langle Ad_i, d_i \rangle}$
$x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i$
$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A d_i$
$\beta_{i+1,i} = \frac{\langle r_{i+1}, r_{i+1} \rangle}{\langle r_i, r_i \rangle}$
$d_{i+1} = r_{i+1} + \beta_{i+1,i} d_i$

## 2 שיטת החזקה

תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ לכסינה עם ערכים עצמיים $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. $\lambda_1$ נקרא ערך עצמי אקסטרמלי ודומיננטי. יהי $x_1, \dots, x_n$ בסיס עצמי של וקטורי יחידה. נבחר $q^0 \in \mathbb{C}^n$. נגדיר

$$z^{(k)} = Aq^{(k-1)}$$
$$q^{(k)} = \frac{z^{(k)}}{\left|\left|z^{(k)}\right|\right|_2}$$
$$\nu^{(k)} = \left\langle Aq^{(k)}, q^{(k)} \right\rangle$$

ואז $\nu^{(n)} \to \lambda_1$.

**תרגיל** נגדיר

$$\tilde{q}^{(k)} = \frac{q^{(k)} \left|\left|A^k q_0\right|\right|_2}{\alpha_1 \lambda_1^k}$$

כאשר $q^{(0)} = \sum \alpha_i x_i$. הראו כי

$$\left|\left|\tilde{q}^{(k)} - x_1\right|\right| \leq C \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$$

עבור $C > 0$ קבוע כלשהו.

**פתרון**

$$q^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$$
$$A^k q^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k x_j = \alpha_1 \lambda_1^k \left( x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k x_j \right)$$

ניתן להראות באינדוקציה כי

$$q^{(k)} = \frac{A^k q^{(0)}}{\left|\left|A^k q^{(0)}\right|\right|}$$

$$\tilde{q}^{(k)} = x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k x_j$$

כעת נקבל

$$\left|\left|\tilde{q}^{(k)} - x_1\right|\right|_2 = \left|\left|\sum_{j=2}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_1}\right) \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k x_j\right|\right|_2 \leq$$

$$\leq \sum_{j=2}^{n} \left|\frac{\alpha_j}{\alpha_1}\right| \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^k \leq \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k \underbrace{(n-1) \max \left|\frac{\alpha_j}{\alpha_1}\right|}_{C}$$