אנליזה נומרית 1

ⓒ ארזים

4 במאי 2017

1 נורמות של מטריצות

הגדרה 1.1 יהי V מרחב ווקטורי, A אופרטור לינארי מעל V ושדה F ונורמה $||\cdot||$ על V. נגדיר נורמה של A:

$$||A|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Ax||$$

דוגמא תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. הוכיחו כי

$$||A||_1 := \sup_{||x||_1 \leq 1} ||Ax||_1 = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{j,k}| =: M$$

הוכחה: בשלב ראשון, נראה כי $||A||_1 \leq M$. די להראות שלכל x עם $||x||_1 \leq 1$ מתקיים $||Ax||_1 \leq M$. נחשב:

$$||Ax||_1 = \sum_{j=1}^{n} \left|(Ax)_j\right| = \sum_{j=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k\right| \leq \sum_{j} \sum_{k} |a_{jk} x_k| <$$
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| M = M ||x||_1 \leq M$$

בכיוון השני, M מוגדר כמקסימום, נבחר i_0 להיות האינדקס בו המקסימום הזה מושג. ניקח את e_{i_0} להיות הווקטור שהוא 0 בכל קואורדינטה, פרט לקואורדינטה i_0, שם הוא 1. בבירור $||e_{i_0}||_1 = 1$, ומההגדרה, $||Ae_{i_0}||_1 = M$. לכן סיימנו. ■

תרגיל תהי A מטריצה ריבועית. הראו שקיימת Q אוניטרית (כלומר $Q^* := \overline{Q^T} = Q^{-1}$) שעבורה Q^*AQ משולשית עליונה.

הוכחה: באינודקציה על מימד המטריצה n. עבור $n = 1$, A סקלר, ואין מה לעשות. כעת נניח נכונות עד $n-1$, ונוכיח עבור n.

למטריצה A יש ערך עצמי λ עם ווקטור עצמי u. נשלים לבסיס על ידי גרם שמידט, ונכתוב בעמודות של מטריצה: $U_n = (u, v_2, \dots, v_n)$. זו מטריצה אוניטרית, כי בלי הגבלת הכלליות, $||u|| = 1$, וכן $||v_j|| = 1$. מתוך כפל מטריצות, נקבל

$$U_n^* A U_n = U_n^* (\lambda u, Av_2, \dots, Av_n) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

A_{n-1} היא מסדר $n-1$, ולכן קיימת Q_{n-1} אוניטרית עבורה $Q_{n-1}^* A_{n-1} Q_{n-1}$ משולשית עליונה (מהנחת האינדוקציה). כעת נגדיר

$$Q_n = U_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix}$$

אפשר לבדוק ולהיווכח שאכן $Q_n^* A Q_n$ משולשית עליונה. ■

הגדרה 1.2 עבור מטריצה A נגדיר <u>רדיוס ספקטרלי</u> של A להיות הערך המוחלט המקסימלי של ערך עצמי של A.

משפט 1.3 לכל A ריבועית ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת נורמה על $\mathbb{C}^n$ כך שמתקיים

$$||A|| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

הוכחה: מהתרגיל הקודם קיימת Q אוניטרית עבורה $B = Q^* A Q$ משולשית עליונה. נשים לב שמתקיים $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - B)$, כי הן דומות על ידי מטריצה אוניטרית. ולכן יש למטריצות A, B אותם ערכים עצמיים, ובפרט אותו רדיוס ספקטרלי. B משולשית עליונה, ועל כן ערכיה עצמיים הם $\lambda_j = b_{j,j}$. נגדיר כעת

$$b = \max_{1 \leq j \leq k \leq n} |b_{jk}|$$

את האיבר המקסימלי בערך מוחלט של B. נגדיר כעת

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{(n-1)\, b}\right)$$

כעת נגדיר עוד מטריצה:

$$D = \operatorname{diag}\left(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-1}\right)$$

מתקיים

$$D^{-1} = \operatorname{diag}\left(1, \delta^{-1}, \delta^{-2}, \dots, \delta^{-n+1}\right)$$

נגדיר עוד מטריצה $C=B^{-1}DB$. אפשר לכפול בידיים ולהיווכח:

$$C=\begin{pmatrix} b_{11} & \delta b_{12} & \delta^{2}b_{13} & \dots & \delta^{n-1}b_{1n} \\ & b_{22} & \delta b_{23} & \dots & \delta^{n-2}b_{2n} \\ & & \ddots & \dots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

כעת, מתקיים

$$||C||_{\infty}=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\le\max_{1\le j\le n}\left(|b_{jj}|+\sum_{i=j+1}^{n}\delta^{n-j}\,|b_{ji}|\right)$$

כעת נבצע הרבה אי שוויונות שכולם נובעים מכך שמתקיים $\delta\le 1$. נקבל

$$||C||_{\infty}\le\max_{1\le j\le n}|b_{j,j}|+(n-1)\,\delta b\le\rho\,(A)+\varepsilon$$

מסיימים על ידי כך שמגדירים $V=QC$, ואת הנורמה $||x||:=\left|\left|V^{-1}x\right|\right|_{\infty}$. אז נותר להוכיח שלכל x עם $||x||\le 1$ מתקיים $||Ax||\le\rho\,(A)+\varepsilon$. ■