אנליזה נומרית 1

ארזים ©

27 באפריל 2017

1 אלגברה לינארית

1.1 מבוא

בהינתן מטריצה $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$, נרצה לפתור את $Ax=b$. ישנן כל מיני דרכים לפתור את הבעיה:

1. GEM - דירוג גאוס.
2. חישוב A^{-1} וכפל שני האגפים בה.
3. כלל קרמר.

ועוד ועוד. נרצה לפתור/לקרב פתרון בצורה יעילה. למשל, ראינו שכלל קרמר לא טוב לנו - הוא דורש המון חישובים, בערך $n\left(n+1\right)!$.
משתמשים בפועל בשתי דרכים עיקריות:

1. פירוק יעיל ושימוש בו.
2. שיטות איטרטיביות (לא ניגע בקורס).

1.2 שיטת LU

בהינתן המערכת $Ax=b$, נפעיל דירוג גאוס עד שנגיע למערכת משולשית עליונה. נפתור אחורה - למציאת הפתרון. על הדרך נקבל הצגה

$$A=LU=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ * & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ * & * & \dots & 1 & 0\\ * & * & \dots & * & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{1,1} & * & \dots & * & *\\ 0 & u_{2,2} & \dots & * & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & u_{n-1,n-1} & *\\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_{n,n}\end{pmatrix}$$

בהינתן הצגה זו נתרגם את המערכת $Ax=b$ אל $LUx=b$, ונפתור את שתי המערכות

$$\begin{aligned}Ly&=b\\ Ux&=y\end{aligned}$$

תרגיל חימום: מצאו את פירוק LU של A ופתרו את המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{13}{12} \\ \frac{47}{60} \end{pmatrix}$$

פתרון ראשית נדרג: $m_{21} = \frac{1}{2}, m_{31} = \frac{1}{3}$,

$$R_i \mapsto R_i - m_{i1} R_1$$

ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{31}{180} \end{pmatrix}$$

נמשיך עם $m_{32} = 1$, $R_3 \mapsto R_3 - R_2$ ונקבל את U:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{180} \end{pmatrix}$$

הפתרון כאן הוא $x = (1,1,1)^T$. הפירוק הוא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{pmatrix}$$

כעת, נרצה לדעת אם מידע נוסף על המטריצה יכול לתת לנו פירוק טוב יותר.

תרגיל תהי A מטריצה סימטרית ומוגדרת חיובית ממש - כלומר לכל $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\langle Ax, x \rangle > 0$. הראו שקיימת מטריצה משולשית עליונה H עם

$$A = H^T H$$

הוכחה: נראה קיום באינדוקציה על n - מימד המטריצה. ניזכר שאם A_n סימטרית ומוגדרת חיובית ממש, אז גם כל מינור ראשי שלה (כלומר שמאלי עליון) הוא כזה.

בסיס - $n = 1$, ברור.

נניח נכונות עד $n-1$, ונוכיח עבור n. נכתוב

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & v \\ v^T & \alpha \end{pmatrix}$$

כעת, A_{n-1} סימטרית ומוגדרת חיובית ממש. לפי הנחת האינדוקציה, קיימת הצגה

$$A_{n-1}=H_{n-1}^{T}H_{n-1}$$

נרצה פירוק

$$A=H_{n}^{T}H_{n}=\begin{pmatrix}H_{n-1}^{T} & 0\\ h^{T} & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_{n-1} & h\\ 0 & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{n-1} & H_{n-1}^{T}h\\ h^{T}H_{n-1} & h^{T}h+\beta^{2}\end{pmatrix}$$

מכאן נקבל שני אילוצים:

$$H_{n-1}^{T}h=v$$
$$h^{t}h+\beta^{2}=\alpha$$

ראשית נשים לב שמתקיים $0<\det A_{n-1}=\det H_{n-1}^{T}\det H_{n-1}=\det H_{n-1}^{2}$. בפרט, H_{n-1} הפיכה, ולכן נבחר

$$h=H_{n-1}^{-T}v$$

בפרט נקבל קיום של פירוק כזה מעל $\mathbb{C}$ בוודאות. נותר להשתכנע כי $\beta\in\mathbb{R}$. נחשב:

$$0<\det A_{n}=\det H_{n}^{2}=\left(\beta\det H_{n-1}\right)^{2}=\beta^{2}\det A_{n-1}$$

לכן נקבל

$$\beta^{2}>0$$

מכאן נקבל כי $\beta\in\mathbb{R}$, וסיימנו. $\blacksquare$

תרגיל תהי $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ בעלת מינורים ראשיים A_{i}, $1\leq i\leq n$, הפיכים. הראו שקיימות מטריצות (כל אחת יחידה) D אלכסונית, L משולשית תחתונה עם $L_{i,i}=1$, M^{T} משולשית עליונה עם $\left(M^{T}\right)_{i,i}=1$ כך שמתקיים

$$A=LDM^{T}$$

הוכחה: תחת תנאי השאלה קיים פירוק LU סטנדרטי. נגדיר

$$D=\operatorname{diag}\left(u_{1,1},u_{2,2},\ldots,u_{n,n}\right)=\begin{pmatrix}u_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & u_{n,n}\end{pmatrix}$$

כעת, ברור שכל איברי האלכסון של D הפיכים, כי מכפלתם היא $\det A$. לכן נגדיר $D^{-1}U = M^T$ ונקבל

$$A = LDM^T$$

והיחידות נובעת מיחידות פירוק LU. ■

הערה 1.1 אם A סימטרית אזי $L = M$. אם בנוסף איברי האלכסון של D היו חיוביים, היינו מקבלים $A = H^T H$.

הערה 1.2 אם ידוע הפירוק $A = LDM^T$, נכתוב את המערכת $Ax = b$ בתור

$$\begin{aligned} Lz &= b \\ Dy &= z \\ M^T x &= y \end{aligned}$$

זה עולה $n^2 + n$ פעולות.