אנליזה נומרית 1

ⓒ ארזים

20 באפריל 2017

1 שיטות איטרטיביות

הערה 1.1 משפט נקודת השבת נותן תנאי מספיק להתכנסות.

תרגיל התבוננו בשיטה האיטרטיבית הבאה:

$$x_{n+1} = \phi\left(x_n\right)$$
$$\phi\left(x\right) = x + \left(x-1\right)^2$$

וודאו כי 1 היא נקודת שבת, וכי $\phi'\left(1\right) = 1$.
הניחו ניחוש התחתי $0 \leq x_0 \leq 1$. האם האיטרציות מתכנסות? אם כן, העריכו את קצב ההתכנסות.

פתרון

$$\phi\left(1\right) = 1 + \left(1-1\right)^2 = 1$$
$$\phi'\left(1\right) = 1 + 2\left(1-1\right) = 1$$

כעת,

$$x_{n+1} = \phi\left(x_n\right) = x_n + \left(x_n - 1\right)^2 \geq x_n$$

בנוסף, אם $0 \leq x_n \leq 1$ אזי

$$x_{n+1} - 1 = \left(x_n - 1\right) + \left(x_n - 1\right)^2 = x_n\left(x_n - 1\right) \leq 0$$

ולכן גם $0 \leq x_{n+1} \leq 1$. אם כן, סדרת האיטרציות מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה. לכן היא מתכנסת, נניח לגבול L. כדי למצוא את L, ניקח גבול בנוסחת האיטרציה:

$$x_{n+1} = x_n + \left(x_n - 1\right)^2$$
$$L = L + \left(L-1\right)^2$$
$$\left(L-1\right)^2 = 0$$
$$L = 1$$

כדי לחשב את סדר ההתכנסות:

$$x_{n+1}-1=x_n\left(x_n-1\right)$$

והרי

$$\left|x_n-1\right|=e_n$$

ולכן

$$\begin{aligned}e_{n+1}&=\left|x_n\right|e_n\\ \lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n}&=\lim_{n\to\infty}\left|x_n\right|=1\end{aligned}$$

פרקטית, אם נריץ את השיטה, נקבל את התופעה הבאה: אם $x_n=1-\varepsilon$ אזי

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=1-\varepsilon$$

לכל שלב נקבל שערוך בחסר של סדר ההתכנסות. לכן, אם נבצע fitting למספר סופי של דגימות, נקבל שיערוך שקטן מאחד. לתופעה הזו קוראים התכנסות תת לינארית.

שאלה ראינו ששיטת ניוטון היא מסדר שני. האם ישנן שיטות מסדרים גבוהים יותר? (כן)

תרגיל נניח כי $f\in C^{\infty}$ ונסתכל על האיטרציות הבאות למציאת שורש <u>פשוט</u> α של $f\left(x\right)$:

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=x_n-u\left(x_n\right)\frac{2}{1+\sqrt{1-2t\left(x_n\right)}}\\ u\left(x\right)&=\frac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)}\\ t\left(x\right)&=u\left(x\right)\frac{f''\left(x\right)}{f'\left(x\right)}\end{aligned}$$

הראו כי סדר ההתכנסות הוא לפחות 3.

פתרון נתחיל מחישוב עזר:

$$u'\left(x\right)=\frac{f'\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)-f\left(x\right)f''\left(x\right)}{f'\left(x\right)^2}=1-\frac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)}\frac{f''\left(x\right)}{f'\left(x\right)}=1-t\left(x\right)$$

במקום להסתכל על פונקציית האיטרציות הספציפית, נתבונן בצורה כללית של פונקציית איטרציות:

$$\phi\left(x\right)=x-u\left(x\right)\cdot H\left(t\left(x\right)\right)$$

כשבמקרה שלנו

$$H\left(w\right)=\frac{2}{1+\sqrt{1-2w}}$$

עבור ϕ הזו, נבדוק קונסיסטנטיות.

$$\phi\left(\alpha\right)=\alpha-u\left(\alpha\right)H\left(t\left(\alpha\right)\right)=\alpha-0=\alpha$$

לכן α אכן נקודת שבת. נבדוק נגזרות:

$$\begin{aligned}\phi'\left(x\right)&=1-u'\left(x\right)H\left(t\left(x\right)\right)-u\left(x\right)H'\left(t\left(x\right)\right)t'\left(x\right)=\\&=1-\left(1-t\left(x\right)\right)H\left(t\left(x\right)\right)-u\left(x\right)H'\left(t\left(x\right)\right)t'\left(x\right)\end{aligned}$$

נקבל כעת כי

$$\phi'\left(\alpha\right)=1-H\left(0\right)$$

לכן

$$\phi'\left(\alpha\right)=0\iff H\left(0\right)=1$$

עבור H שלנו זה מתקיים. בפרט, סדר ההתכנסות הוא לפחות 2. באופן דומה,

$$\phi''\left(\alpha\right)=t'\left(\alpha\right)\left(H\left(0\right)-2H'\left(0\right)\right)$$

וזה מתאפס אם ורק אם $H'\left(0\right)=\frac{1}{2}$. זה מתקיים אצלנו, ולכן סדר ההתכנסות הוא לפחות 3.

שאלה האם סדר ההתכנסות הוא תמיד שלם? (לא)

תרגיל נניח כי שיטה איטרטיבית למציאת שורש של פונקציה f מקיימת $e_{n+1}=e_ne_{n-1}$. מה סדר ההתכנסות?

פתרון נגדיר

$$d_n=\ln e_n$$

נקבל

$$d_{n+1}=d_n+d_{n-1}$$

לנוסחת נסיגה לינארית במקדמים קבועים מתאים פולינום אופייני. כאן:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

שורשי הפולינום הם

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$d_n = a\phi^n + b\varphi^n$$
$$e_n = e^{a\phi^n} e^{b\varphi^n}$$

נסתכל על המנה:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^{\phi}} = \frac{e^{a\phi^{n+1}} e^{b\varphi^{n+1}}}{e^{a\phi^{n+1}} e^{b\varphi^n \phi}} = e^{b\varphi^n(\varphi - \phi)}$$

$|\varphi| < 1$, ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^{\phi}} = e^0 = 1$$

ולכן סדר ההתכנסות הוא ϕ, שאינו שלם.