אנליזה נומרית 1

© ארזים

30 במרץ 2017

1 שיטות לקירוב פתרונות של משוואות לא לינאריות

1.1 שיטת החצייה

אם הפונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$, וכן $f(a)f(b)<0$, אז יש ביניהן שורש. נסמן את מרכז הקטע x, ונבדוק את הסימן ־ נחליף את הנקודה מבין a,b שבה f בעלת אותו סימן כמו x בנקודה x עצמה, ונחזור על התהליך.

קריטריון עצירה אפשרי אפשר להגדיר $\varepsilon=tol$, ולעצור כאשר $|f(x_n)|<\varepsilon$. זה קריטריון בעייתי כי ייתכן שהפונקציה משתנה לאט מאוד בסביבת השורש.

כדי לתת טווח טעות (אי וודאות) למיקום השורש האמיתי r, נצטרך קריטריון המערב את f'. ראינו שאם r שורש פשוט של f, קיטריון כזה מתקבל על ידי

$$|x_n-r|\approx\frac{\delta}{|f'(r)|}$$

כאשר: נפתח בעזרת טיילור את f סביב הנקודה r על ידי פיתוח מסדר 1 עם שארית לגראנז':

$$|x_n-r|=\frac{\left|\tilde{f}(x_n)+\delta(x_n)\right|}{|f'(\xi)|}$$

כאשר ξ בין x_n לבין r, $\tilde{f}(x_n)$ הוא הייצוג של $f(x_n)$ במחשב, $\delta(x_n)$ שגיאת עיגול ־ לכל היותר דיוק מכונה למשל.

דוגמא נקח

$$f(x)=(x-2)x+1$$

יש שורש כפול בנקודה $x=1$. ניקח $\tilde{x}=1+\varepsilon$ ונקבל כי

$$f(1+\varepsilon)=\varepsilon^2$$

נניח שעובדים עם 8 ספרות. אז עבור

$$|\varepsilon|<\frac{1}{\sqrt{2}}10^{-4}$$

אזי $\tilde{f}(1+\varepsilon)=0$. קיבלנו שהקירוב שלנו טוב לבערך 4 ספרות. מה הקריטריון שמתקבל

$$|x_n-r|\approx\left(\frac{2\frac{1}{2}10^{-8}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\approx 0.707\cdot 10^{-4}$$

הגדרה 1.1 שיטה נומרית $x_n\to r$ מתכנסת מסדר α אם

$$0<\lim\frac{|x_{n+1}-r|}{|x_n-r|^{\alpha}}=M<\infty$$

מגדירים $x_n-r=e_n$.

תרגיל נניח כי $f(r)=0$ כאשר $f'(r),f''(r)>0$, $f\in C^2$ בסביבת r. הראו כי שיטת False Position מתכנסת לינארית.

פתרון $f\in C^2$, ולכן בלי הגבלת הכלליות $f''>0$ בקטע התחלתי $[a,b]$. בגלל קמירות, הנקודה הימנית לא תשתנה באף איטרציה. האיטרציות הן

$$x_n=a_n-f(a_n)\frac{b_n-a_n}{f(b_n)-f(a_n)}$$

נציב:

$$\begin{aligned}x_n&=x_{n-1}-f(x_{n-1})\frac{b-x_{n-1}}{f(b)-f(x_{n-1})}\\ e_n&=e_{n-1}-f(x_{n-1})\frac{b-x_{n-1}}{f(b)-f(x_{n-1})}\\ \frac{e_n}{e_{n-1}}&=1-\frac{f(x_{n-1})-f(r)}{x_{n-1}-r}\cdot\frac{b-r-e_{n-1}}{f(b)-f(r+e_{n-1})}\\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e_n}{e_{n-1}}\right|&=\left|1-f'(r)\frac{b-r}{f(b)-f(r)}\right|\end{aligned}$$

נותר לנו להראות

$$f'(r)\frac{b-r}{f(b)-f(r)}\neq 1$$

נפתח טיילור:

$$\frac{f(b)-f(r)}{b-r}=\frac{f'(r)(b-r)+\frac{1}{2}f''(\xi)(b-r)}{b-r}$$

לכן בגבול נקבל

$$\frac{f'(r)}{f'(r)+\frac{1}{2}\underbrace{f''(\xi)}_{>0}(b-r)} \neq 1$$

לכן סיימנו.

1.2 שיטות נקודת שבת

מוטיבציה נרצה לפתור את $f(r)=0$. נתרגם לבעיה שקולה מהצורה $g(r)=r$. כעת, אם g חלקה מספיק בסביבת r, וכן g מכווצת, כלומר בסביבת r יש $\beta<1$ המקיים

$$|g(x)-g(y)| \leq \beta|x-y|$$

אזי ממשפט העתקה המכווצת, קיימת נקודת שבת יחידה בסביבה.