אנליזה נומרית 1

© ארזים

22 ביוני 2017

1 אינגטרציה נומרית ופולינומים אורתוגונליים

נרצה לקרב אינטגרל

$$\int_a^b f(x)\,\omega(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

הדרך לעשות זאת: נגדיר מרחב מכפלה פנימית $L_2^{\omega}[a,b]$ עם מכפלה פנימית

$$\langle f,g\rangle \int_a^b f(x)\,g(x)\,\omega(x)\,\mathrm{d}x$$

לוקחים בסיס כלשהו של פולינומים, למשל $\left\{1,x,x^2,\dots\right\}$ ועושים גרם־שמידט. נקודות הדגימה $x_0,\dots,x_n$ הן השורשים של p_{n+1}. הדיוק האלגברי הוא $2n+1$.

תרגיל הראו שלפולינום P_n יש בדיוק n שורשים פשוטים בקטע (a,b).

פתרון פורמלית ־ באינדוקציה. יהי p_n עבור $n\geq 1$. ראשית, נטען שיש לו שורש כלשהו בקטע (a,b). אחרת, p_n היה שומר סימן בקטע $[a,b]$. אם כך,

$$0=\int_a^b p_n(x)\,\omega(x)\,\mathrm{d}x=\langle p_n,1\rangle$$

מצד שני, בלי הגבלת הכלליות $p_n>0$ בקטע, ונקבל

$$\int_a^b p_n(x)\,\omega(x)\,\mathrm{d}x>0$$

בסתירה. נוציא את השורש ונכתוב $p_n(x)=(x-x_0)^k q(x)$. נראה שבהכרח $k=1$. נניח כי $k\geq 2$. אם הוא זוגי, אזי

$$0=\int_a^b p_n(x)\,q(x)\,\omega(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b (x-x_0)^k q^2(x)\,\omega(x)\,\mathrm{d}x>0$$

ולכן k לא זוגי. כעת ניקח את

$$\int_a^b p_n(x)\,q(x)\,(x-x_0)\,\omega(x)\,\mathrm{d}x$$

וטיעון זהה יעבוד (בגלל שהנחנו $k>1$, ולכן $\deg\left(q(x)(x-x_0)\right)<n$. עד כה הראינו $p_n(x)=(x-x_0)\,q(x)$, כאשר $q(x_0)\neq 0$. אם $n=1$ סיימנו, כי q קבוע. אחרת, $n\geq 2$, ונראה שיש עוד שורש $x_1\neq x_0$ - אחרת q שומרת סימן (בלי הגבלת הכלליות חיובית). נקבל

$$0=\int_a^b p_n(x)\,(x-x_0)\,\omega(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b q(x)\,(x-x_0)^2\,\omega(x)\,\mathrm{d}x>0$$

ולכן יש עוד שורש. נמשיך כך עד לקבלת n שורשים.

תרגיל (מבחינה) יהי $[a,b]$ קטע, ותהי $\omega(x)$ פונקציית משקל עליו. יהיו $\{p_n(x)\}$ משפחה של פולינומים אורתוגונליים ביחס אליה. נגדיר $x_0,\ldots,x_n$ את השורשים של p_{n+1}. נגדיר מטריצה

$$M=\begin{pmatrix} p_0(x_0) & \ldots & p_0(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n(x_0) & \ldots & p_n(x_n) \end{pmatrix}$$

הראו כי M הפיכה וחשבו הופכית.

פתרון יש לנו נוסחת אינטגרצית גאוס:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)\approx\int_a^b f(x)\,\omega(x)\,\mathrm{d}x$$

זו בעלת דיוק אלגברי $2n+1$. נגדיר

$$N=\mathrm{diag}(A_0,\ldots,A_n)\,M^T=\begin{pmatrix} A_0p_0(x_0) & \ldots & A_0p_n(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_np_0(x_0) & \ldots & A_np_n(x_n) \end{pmatrix}$$

נראה כי $NM=I_{n+1}$. נחשב:

$$(NM)_{i,j}=\langle R_i(M),C_j(N)\rangle=\sum_{k=0}^{n} p_i(x_k)\,A_kp_j(x_k)=\sum_{k=0}^{n} A_k\,(p_ip_j)(x_k)$$

מהדיוק האלגברי נקבל

$$(NM)_{i,j}=\int_a^b \omega(x)\,p_i(x)\,p_j(x)\,\mathrm{d}x=\delta_{i,j}$$

תרגיל נתונה נוסחת אינטגרציה נומרית

$$\int_a^b f\left(x\right)\omega\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}A_kf\left(x_k\right)$$

נניח כי f רציפה בקטע $[a,b]$. הראו כי נוסחת האינטגרציה מתכנסת לאינטגרל האנליטי עבור $n\to\infty$.

פתרון נשתמש בטענת עזר - משפו ויירשטראס. הוא אומר שקיימת סדרת פולינומים $\{R_k\}$ עם $f \xrightarrow{u} R_k$ בקטע $[a,b]$. ראשית נוכיח כי $A_k>0$ לכל k. יהי p_n הפולינום האורתוגונלי שמעלתו n, ונגדיר

$$p\left(x\right)=\frac{p_n\left(x\right)}{x-x_k}$$

אזי $\deg p=n-1$, וכן $\deg p^2=2n-2$, שזה פחות מהדיוק האלגברי. נציב בנוסחת האינטגרציה:

$$0<\int_a^b p^2\left(x\right)\omega\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{n}A_jp^2\left(x_j\right)=A_kp^2\left(x_k\right)$$

ומכאן $A_k>0$. בנוסף, נשים לב שהערך $\sum_{j=1}^{n}A_j$ אינו תלוי בערך n, שכן הוא נוסחת האינטגרציה של $f=1$, שעליה אנחנו מדוייקים. כעת, יהי $\varepsilon>0$, ויהי P פולינום כל שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים

$$\left|f\left(x\right)-p\left(x\right)\right|<\frac{\varepsilon}{c}$$

עבור

$$c=2\int_a^b\omega\left(x\right)\,\mathrm{d}x=2\sum_{j=1}^{n}A_j$$

פולינום כזה מובטח לנו ממשפט ויירשטראס. נניח כעת כי $\deg p\le 2n-1$. עבור n שכזה, נוסחת האינטגרציה הנומרית מדוייקת על p, ואז

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f\left(x\right)\omega\left(x\right)-\sum_{j=1}^{n}A_jf\left(x_j\right)\right|&=\left|\int_a^b f\left(x\right)\omega\left(x\right)\,\mathrm{d}x-\int_a^b p\left(x\right)\omega\left(x\right)\,\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{n}A_jp\left(x_j\right)-\sum_{j=1}^{n}A_jf\left(x_j\right)\right|\le\\&\le\left|\int_a^b\left(f\left(x\right)-p\left(x\right)\right)\omega\left(x\right)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\sum_{j=1}^{n}A_j\left(p\left(x_j\right)-f\left(x_j\right)\right)\right|\le\\&\le\int_a^b\left|f\left(x\right)-p\left(x\right)\right|\omega\left(x\right)\,\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{n}A_j\left|p\left(x_j\right)-f\left(x_j\right)\right|\le\\&\le\frac{\varepsilon}{c}\int_a^b\omega\left(x\right)\,\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{c}\sum_{j=1}^{n}A_j=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$