אנליזה נומרית 1

ⓒ ארזים

18 ביוני 2017

1 אינטגרציה נומרית

יש לנו $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן, ואנחנו מגדירים

$$I\left(f\right)=\int\limits_a^b f\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

הערך הזה עלול להיות קשה לחישוב, ולכן נחפש קירוב:

$$I\left(f\right)\approx NI\left(f\right)$$
$$NI\left(f\right)=\sum_{j=0}^{n}A_jf\left(x_j\right)=\left\langle A,f\right\rangle$$

עבור $a\leq x_0\leq\cdots\leq x_n\leq b$.

שיטות

1. דיוק אלגברי (ראינו בהרצאה).
2. פולינום אינטרפולציה (נראה עכשיו).

1.1 פולינום אינטרפולציה

יהי $P_n\left(x\right)$ פולינום האינטרפולציה בנקודה $x_0<\cdots<x_n$. אזי

$$f\left(x\right)=p_n\left(x\right)+e\left(x\right)$$

כאשר

$$e\left(x\right)=f\left[x_0,\ldots,x_n,x\right]\prod_{j=0}^{n}\left(x-x_j\right)$$

ולכן

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b p_n\left(x\right)\,\mathrm{d}x+\int\limits_a^b f\left[x_0,\ldots,x_n\right]\underbrace{\prod_{j=0}^{n}\left(x-x_j\right)}_{\psi_n}\,\mathrm{d}x$$

נקבל את הקירוב

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x$$

נציג את p_n בצורת לגראנז' ונקבל

$$\int_a^b p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(\underbrace{\int_a^b L_j(x)\,\mathrm{d}x}_{A_j} \right) f(x_j)$$

מה שמעניין אותנו כאן זו השגיאה:

$$E_{int} = \int_a^b f[x_0, \ldots, x_n, x]\, \psi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

תרגיל נניח כי ψ_n שומרת סימן בקטע $[a,b]$. הראו כי עבור $f \in C^{n+1}$ מתקיים

$$|E_{int}| \le \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!} \sup_{\xi\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|$$

בנוסף, מה ניתן לומר על הדיוק האלגברי?

פתרון $f \in C^{n+1}$, ולכן $g(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x]$ רציפה בקטע $[a,b]$. ψ_n שומרת סימן, ולכן נוכל להפעיל את משפט ערך הביניים האינטגרלי: קיימת $c \in [a,b]$ עם

$$E_{int} = f[x_0, \ldots, x_n, c] \int_a^b \psi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

כעת

$$f[x_0, \ldots, x_n, c] = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}$$

עבור $\alpha \in [a,b]$ כלשהי. לכן

$$|E_{int}| \le \frac{\left| f^{(n+1)}(\alpha) \right|}{(n+1)!} \int_a^b |\psi_n(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!} \sup_{\xi\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|$$

וסיימנו

הערה 1.1 נניח כי $f \in C^{\infty}$ והנגזרות של f חסומות במידה אחידה על $[a,b]$ על ידי $M > 0$. אזי

$$\left|E_{int}\right| \leq \frac{M\left(b-a\right)^{n+2}}{\left(n+1\right)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

הערה 1.2 אם $b = a+h$ נקבל $\left|E_{int}\right| \leq C \cdot h^{n+2}$, וכאשר $h \to 0$ השגיאה היא $O\left(h^{n+2}\right)$.

תרגיל נניח כי $f \in C^{n+2}$, וכן

$$\int\limits_a^b \psi_n\left(x\right)\,\mathrm{d}x = 0$$

כמו כן, נניח שיש נקודה x_{n+1} שעבורה $\psi_n\left(x\right)\left(x-x_{n+1}\right)$ שומרת סימן בקטע. אזי

$$\left|E_{int}\right| \leq \frac{\left(b-a\right)^{n+3}}{\left(n+2\right)!}\sup_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}\left(\xi\right)\right|$$

תרגיל

$$E_{int} = \int\limits_a^b f\left[x_0,\ldots,x_n,x\right]\psi_n\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

נסתכל על ההפרש המחוק. אם הנקודות שונות (נניח את זה), אזי $f\left[x_0,\ldots,x_n,x_{n+1},x\right]$ לא תלוי בסדר הנקודות. כעת,

$$f\left[x_0,\ldots,x_n,x_{n+1},x\right] = f\left[x_{n+1},x_0,\ldots,x_n m x\right] = \frac{f\left[x_0,\ldots,x_n,x\right] - f\left[x_0,\ldots,x_n,x_{n+1}\right]}{x-x_{n+1}}$$

$$f\left[x_0,\ldots,x_n,x\right] = \left(x-x_{n+1}\right)f\left[x_0,\ldots,x_n,x_{n+1},x\right] + f\left[x_0,\ldots,x_n,x_{n+1}\right]$$

נכפול את שני האגפים פי ψ_n וניקח אינטגרל. נקבל

$$E_{int} = \int\limits_a^b f\left[x_0,\ldots,x_n,x_{n+1},x\right]\psi_n\left(x\right)\left(x-x_{n+1}\right)\,\mathrm{d}x$$

מכאן נמשיך כמו בתרגיל הקודם כדי לקבל את הנדרש.

דוגמא כלל נקודת האמצע: $P_0\left(x\right) = f\left(x_0\right)$, כאשר $x_0 = \frac{a+b}{2}$. הקירוב הוא

$$\int\limits_a^b P_0\left(x\right)\,\mathrm{d}x = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-a\right)$$

השגיאה היא

$$E_{int}\int_a^b f\left[x_0,x\right]\left(x-x_0\right)\,\mathrm{d}x$$

אפשר לוודא כי

$$\int_a^b \left(x-x_0\right)\,\mathrm{d}x=0$$

תרגיל הראו שנוסחת אינטגרציה

$$\int_a^b f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\sum_{j=0}^{n}A_j f\left(x_j\right)$$

לא יכולה להיות בעלת דיוק אלגברי גבוה מאשר $2n+1$.

פתרון נגדיר

$$Q\left(x\right)=\prod_{j=0}^{n}\left(x-x_j\right)^2$$

פולינום ממעלה $2n+2$, שהכלל שלנו יאפס את האינטגרל שלו, אבל הוא אי שלילי ויש נקודה שבה הוא חיובי, ולכן האינטגרל שלו חיובי.