<u>אנליזה נומרית 1</u>

ארזים ©

27 באפריל 2017

סיימנו במשפט:

משפט 0.1

$$||A||_2 = \sqrt{\rho\left(A^TA\right)}$$

הוכחה: נחשב:

$$||Ax||_2^2 = (Ax)^T(Ax) = x^TA^TAx = \left\langle x, A^TAx\right\rangle$$

נמשיך:

$$\frac{||Ax||_2^2}{||x||_2^2} = \frac{\left\langle x, A^TAx\right\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

נסמן A^TA. B סימטרית ומוגדרת חיובית, ולכן יש לה n ערכים ממשיים λ_i עם ווקטורים עצמיים אורתונורמליים v_i. נציג את x בבסיס הווקטורים העצמיים בתור

$$x = \sum \alpha_i v_i$$

ואז

$$Bx = \sum \alpha_i \lambda_i v_i$$

אזי

$$\langle x, Bx\rangle = \left\langle \sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_i\lambda_i v_i\right\rangle = \sum \lambda_i \alpha_i^2$$
$$\langle x, x\rangle = \left\langle \sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_i v_i\right\rangle = \sum \alpha_i^2$$

לכן המנה היא

$$\frac{\sum \lambda_i \alpha_i^2}{\sum \alpha_i^2} \leq \lambda_n = \rho\left(B\right)$$

לכן קיבלנו כי

$$||A||_2 \leq \sqrt{\rho\left(B\right)}$$

מצד שני, עבור $x = v_n$ נקבל שהמנה הזו היא בדיוק λ_n, ולכן זהו המקסימום, כלומר

$$||A||_2 = \sqrt{\rho\left(B\right)}$$

■

1 ניתוח שגיאות בפתרון מערכת משוואות

נתונה המערכת $Ax = b$. בפועל פותרים

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

נרצה לדעת איך השינוי הזה משפיע על הפתרון.

1.1 שגיאות בווקטור b

נסמן x את הפתרון האמיתי, $\tilde{x}$ את המקורב. נגדיר

$$r = \tilde{b} - b = A\tilde{x} - b$$

אזי

$$\begin{aligned} A\tilde{x} - Ax &= \tilde{b} - b = r \\ \tilde{x} - x &= A^{-1}r \\ ||\tilde{x} - x|| &= \left|\left|A^{-1}r\right|\right| \leq \left|\left|A^{-1}\right|\right| ||r|| \end{aligned}$$

קיבלנו

$$\frac{||\tilde{x} - x||}{||r||} \leq \left|\left|A^{-1}\right|\right|$$

זוהי רגישות של x לשינוי מוחלט בווקטור b. הרגישות המוחלטת חסומה. נחסום את הטעות היחסית:

$$\frac{1}{||x||} \leq \frac{||A||}{||b||}$$

נכפול את מה שקיבלנו:

$$\frac{||\tilde{x}-x||}{||x||} \leq ||A|| \left|\left|A^{-1}\right|\right| \frac{||r||}{||b||}$$

הגדרה 1.1 מספר התנאי (condition number) של מטריצה A מוגדר על ידי

$$\mathrm{Cond}\left(A\right) = ||A|| \left|\left|A^{-1}\right|\right|$$

והוא תלוי בנורמה בה משתמשים.

למה 1.2 לכל נורמה מושרית מתקיים $\mathrm{Cond}\left(A\right) \geq 1$.

הוכחה: לכל נורמה מושרית מתקיים

$$||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$$

(תרגיל). לכן

$$1 = ||I|| = \left|\left|AA^{-1}\right|\right| \leq ||A|| \left|\left|A^{-1}\right|\right|$$

■

דוגמה ניקח $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$. הפתרון הוא $(1,1)$. נשתמש בנורמת ∞. מתקיים

$$\left|\left|A^{-1}\right|\right|_\infty = \frac{1}{\varepsilon}, ||A|| = 1$$

$||b||_\infty = 1$, $||x||_\infty = 1$. אזי

$$\frac{||\tilde{x}-x||_\infty}{||r||_\infty} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

ואז

$$\frac{\frac{||\tilde{x}-x||}{||x||}}{\frac{||r||}{||b||}} \leq \mathrm{Cond}\left(1,\infty\right) = \frac{1}{\varepsilon}$$

נכניס שינוי באגף ימין של מערכת המשוואות: $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 \\ \varepsilon+\alpha_2 \end{pmatrix}$ ונקבל

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 \\ 1+\frac{\alpha_2}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$