אנליזה נומרית 1

© ארזים

20 באפריל 2017

1 פירוק LU

נתונה מטריצה A. נבצע פעולות על שורות: נגדיר

$$m_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$$

וכעת

$$R_i^{(k+1)} = R_i^{(k)} - m_{i,k} R_k^{(k)}$$

כלומר

$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - m_{i,k} a_{k,j}^{(k)}$$

נקבל לבסוף שתי מטריצות:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
$$U = A^{(n)}$$

ברור כי L משולשית תחתונה, U משולשית עליונה.

משפט 1.1

$$A = LU$$

הוכחה: נחשב:

$$(LU)_{i,j}=(m_{i,1},\ldots,m_{i,i-1},1,0,\ldots,0)\cdot\begin{pmatrix}u_{1,j}\\ \vdots\\ u_{j,j}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

כעת, אם $i\leq j$, כלומר האיבר הוא על או מעל לאלכסון:

$$\begin{aligned}(LU)_{i,j}&=\sum_{k=1}^{i-1}m_{i,k}u_{k,j}+u_{i,j}=\sum_{k=1}^{i-1}m_{i,k}a_{k,j}^{(k)}+a_{i,j}^{(i)}=\\&=\sum_{k=1}^{i-1}\left(a_{i,j}^{(k)}-a_{i,j}^{(k+1)}\right)+a_{i,j}^{(i)}=a_{i,j}^{(1)}=a_{i,j}\end{aligned}$$

אם $i>j$, כלומר האיבר מתחת לאלכסון:

$$\begin{aligned}(LU)_{i,j}&=\sum_{k=1}^{j}m_{i,k}u_{k,j}=\sum_{k=1}^{j}m_{i,j}a_{k,j}^{(k)}=\sum_{k=1}^{j}\left(a_{i,j}^{(k)}-a_{i,j}^{(k+1)}\right)=\\&=a_{i,j}^{(1)}-a_{i,j}^{(j+1)}=a_{i,j}^{(1)}=a_{i,j}\end{aligned}$$

לכן סיימנו. $\blacksquare$

כעת נרצה לחשב את סיבוכיות האלגוריתם.

1. חישוב $A^{(k+1)}$: יש לבצע $n-k$ פעולות חילוק כדי לחשב $n-k$ כופלי שורה, $(n-k)^2$ פעולות כפל ועוד $(n-k)^2$ פעולות חיסור. סך הכל פעולות חילוק:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}\approx\frac{n^2}{2}$$

סך הכל פעולות כפל (או חיסור):

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2=\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\approx\frac{n^3}{3}$$

לכן שלב זה לוקח $\frac{2n^3}{3}$.

2. הפיכת הווקטור המקורי b לווקטור החדש g. בשלב k יש לבצע $n-k$ פעולות כפל ועוד $n-k$ פעולות חיסור. סך הכל n^2 פעולות.

3. פתרון $Ux = g$. בשלב k יש לבצע $n-k$ פעולות כפל ועוד $n-k$ פעולות חיסור, ועוד פעולת חילוק יחידה. סך הכל n^2 פעולות.

בסך הכל הסיבוכיות היא $\frac{2n^3}{3}$. שימושים לפירוק LU:

1. פתרון $Ax = b$.
2. חישוב דטרמיננטה.
3. אם נתונות מספר משוואות מהצורה $Ax_m = b_m$ (m מערכות). אם היינו פותרים כל מערכת בנפרד, הסיבוכיות הייתה $\frac{2}{3}mn^3$. אם נפרק את A פעם אחת פירוק LU, ונפתור M מערכות מהצורה $LUx_m = b_m$, על ידי פתרון

$$\begin{aligned} Ly_m &= b_m \\ Ux_m &= y_m \end{aligned}$$

סך כל הפעולות עבור M אגפי ימין הוא $\frac{2}{3}n^3 + 2n^2m$.

4. חישוב A^{-1} - נפתור את

$$A\left(x_1, \ldots, x_n\right) = I_n$$

ונקבל סיבוכיות

$$\frac{2}{3}n^3 + 2n^3 = \frac{8}{3}n^3$$

הערה 1.2 את L, U מאכסנים לרוב במטריצה אחת - זורקים את האחדים על האלכסון של L, שידוע שהם שם.

מה קורה אם $a_{k,k}^{(k)}$ קטן?

דוגמא נבצע חישובים בארבע ספרות, ונפתור

$$\begin{aligned} 10^{-6}x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

הפתרון הוא $x_1 = 1, x_2 = 1$. נפתור על פי אלימינציית גאוס: נקבל

$$\begin{aligned} 10^{-6}x_1 + x_2 &= 1 \\ -10^6 x_2 &= -10^6 \end{aligned}$$

מכאן $x_2 = 1$, $x_1 = 0$. הבעיה הזו יכולה להתרחש כאשר

$$a_{k,k}^{(k)} \ll a_{k,j}^{(k)} b_k^{(k)}$$

כאשר $j > k$.

דוגמה דומה:

$$10^{-6}x_1 + 10^{-6}x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

לפי אלימינציית גאוס נקבל

$$10^{-6}x_1 + 10^{-6}x_2 = 2 \cdot 10^{-6}$$
$$x_2 = 1$$

מכאן נקבל גם $x_1 = 1$ וזה הפתרון הנכון.

יש שני פתרונות לבעיה הזו:

1. שיטת complete pivoting (החלפת שורות ועמודות): בשלב k מוצאים $i_0, m_0 \geq k$ כך שמתקיים

$$\left|a_{i_0,m_0}^{(k)}\right| = \max_{i,m \geq k} \left|a_{i,m}^{(k)}\right|$$

ואז מחליפים שורה k עם שורה i_0, ועמודה k עם עמודה m_0.

2. שיטת partial pivoting, שנראה בשיעור הבא.