אנליזה נומרית 1

© ארזים

2 באפריל 2017

1 מציאת שורשים

נחזור לקצב התכנסות שיטת המיתר. ראינו כי

$$e_{n+1} \approx \lambda^{1+\alpha} e_{n-1}^{\alpha^2}$$
$$e_{n+1} \approx \frac{f''}{2f'} \lambda e_{n-1}^{\alpha+1}$$

כעת, ננסה להוציא מכאן את α, λ. נקבל

$$\lambda^{1+\alpha} e_{n-1}^{\alpha^2} = \frac{f''}{2f'} e_{n-1}^{\alpha+1}$$
$$\frac{2\lambda^{\alpha} f'}{f''} = e_{n-1}^{\alpha+1-\alpha^2}$$

אם $-\alpha^2 + \alpha + 1 \neq=$ נקבל דברים לא הגיוניים (או שאגף ימין יהיה גדול מדי או קטן מדי). לכן

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

כי הוא חיובי.

1.1 מערכות משוואות

דוגמא

$$x^3 + e^{xy} + 3 = 0$$
$$x^4 + y^3 - 7 = 0$$

באופן כללי יש לנו מערכות

$$F(x,y) = 0$$
$$G(x,y) = 0$$

נכליל את שיטת ניוטון. אמרנו כי

$$f(r) \approx f(x_n) + (r - x_n) f'(x_n)$$
$$r \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

וכך עושים איטרציות. בכמה משתנים ־ נתונה המערכת $F_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $1 \le i \le n$. נגדיר

$$F = (F_1, \ldots, F_n)^T$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

נפתח את F בסביבת x:

$$F_i(x + \Delta x) = F_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Delta x_j + o\left(\Delta x^2\right)$$

בסך הכל:

$$F(x + \Delta x) = F(x) + J\Delta x + o\left(\Delta x^2\right)$$

כאשר

$$J = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$$

נפתור:

$$F(x) + J\Delta x = 0$$

קיבלנו מערכת משוואות לינארית. הפתרון הוא

$$J\Delta x = -F(x)$$

ולכן העדכון הוא

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

מסתבר שיש דרכים מאוד קלות לעשות מינימליזציה של פונקציה (ולא בהכרח צריך לגזור ולאפס את הנגזרת). כך אפשר תיאורטית להקל על מציאת שורשים ־ בהינתן:

$$F(x, y) = 0$$
$$G(x, y) = 0$$

נגדיר

$$H(x,y)=F^2(x,y)+G^2(x,y)$$

ונמצא מינימום.

2 אלגברה לינארית

2.1 שיטות ישירות לפתרון של מערכות משוואות

נרצה לפתור את המערכת

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n\end{aligned}$$

נסמן $A=(a_{ij})_{i,j}$, $x=(x_1,\ldots,x_n)^T$, $b=(b_1,\ldots,b_n)^T$. אנחנו נעסוק רק במטריצות צפופות, שבהן רוב האיברים אינם 0.

2.1.1 כלל קרמר

נסמן בתור A_i את המטריצה A שבה מחיפים את העמוד i בווקטור b. אזי

$$x_j=\frac{|A_i|}{|A|}$$

חישוב דטרמיננטה הוא קשה:

$$\det A=\sum_p \operatorname{sign}(p)\, a_{1,p(1)}\cdots a_{n,p(n)}$$

כאשר הסכום הוא על פני פרמוטציות של $\{1,\ldots n\}$. סך הפעולות הוא $n!\cdot n$. כדי להשתמש בכלל קרמר צריך לחשב $n+1$ דטרמיננטות, ובסך הכל, $n(n+1)!$ פעולות. אם A מגודל 10×10 מספר הפעולות הוא בערך $4\cdot 10^8$. זה מאוד לא יעיל.

דוגמא נפתור את המערכת

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=0\\ 2x_1+2x_2+3x_3&=3\\ -x_1-3x_2&=2\end{aligned}$$

בצורה מטריציונית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

נבצע אלימינציית גאוס. נסמן R_i את השורה i, ועשה פעולות מהצורה $R_i \leftarrow R_i - m_{ij}R_j$. נבצע:

$$R_2 \leftarrow R_2 - m_{21}R_1, m_{21} = 2$$
$$R_3 \leftarrow R_3 - m_{31}R_1, m_{31} = -1$$

נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

לבסוף

$$R_3 \leftarrow R_3 - m_{32}R_2, m_{32} = \frac{1}{2}$$

ונקבל מטריצה משולשית עליונה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

נפתור כעת על ידי הצבה לאחור.

$$\frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = 1$$
$$-2x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = -1$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

2.1.2 אלימינצית גאוס ־ מקרה כללי

רעיון נבצע פעולות על שורות המטריצה המורחבת $(A \mid b)$ כדי לקבל מטריצה משולשית עליונה, ואז נפתור על ידי הצבה לאחור. נסמן את המטריצה המקורית $A^{(1)}$.

האלגוריתם

1. נניח $a_{11}^{(1)} \neq 0$. נגדיר את כופלי השורות:

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

וכעת נאפס את המקדם של x_1 בכל השורות:

$$R_i^{(2)} = R_i^{(1)} = m_{i1} R_1^{(1)}$$

כעת קיבלנו את המערכת

$$A^{(2)} x = b^{(2)}$$

נמשיך באותה שיטה, עד שנקבל מטריצה משולשית עליונה.

2. כעת יש לנו מערכת מהצורה

$$A^{(n)} x = b^{(n)}$$

כאשר $A^{(n)}$ משולשית עליונה. נבצע הצבה לאחור. נסמן $U = A^{(n)}$, $g = b^{(n)}$. אזי

$$x_n = \frac{g_n}{U_{nn}}$$
$$x_k = \frac{1}{U_{kk}} \left(g_k - \sum_{j=k+1}^{n} U_{kj} x_j \right)$$

משפט 2.1 נסמן U את המטריצה שהתקבלה בתהליך האלימינציה, ונסמן

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר $m_{i,j}$ הם כופלי השורות מהאלגוריתם. אזי $A = LU$.

ההוכחה תהיה בפעם הבאה. נוכל לחשב בעזרת זה דטרמיננטה מהר:

$$\det A = \det L \det U = \det U = \prod_{i=1}^{n} U_{ii}$$