<u>אנליזה נומרית</u>

© ארזים

30 במרץ 2017

1 איטרציות נקודת שבת

ראינו שאם יש לנו איטרציה $x_{n+1}=g\left(x_n\right)$ עם $\left|g'\left(x\right)\right|\le k<1$, אזי

$$\left|x_n-r\right|\le k^n\left|x_0-r\right|$$

1.1 קצב התכנסות

נתונה סדרה $\left\{x_n\right\}\to r$. השגיאה באיטרציה n היא $e_n=x_n-r$.

הגדרה 1.1 אם

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|e_{n+1}\right|}{\left|e_n\right|^{\alpha}}=\lambda\neq0$$

אזי הסדרה x_n מתכנסת אל r בקצב α עם קבוע אסימפטוטי λ. אם $\alpha=1$ הקצב נקרא לינארי, אם $\alpha=2$ הוא נקרא ריבועי.

בקצב התכנסות לינארי:

$$\left|e_{n+1}\right|\approx\lambda\left|e_n\right|\approx\lambda^2\left|e_{n-1}\right|\approx\ldots$$

חייב להתקיים $\lambda<1$. ככל שהקבוע λ קטן יותר, ההתכנסות מהירה יותר. כמו כן, נדרש מספר קבוע של איטרציות כדי לקבל ספרת דיוק נוספת.

בקצב התכנסות ריבועי:

דוגמה ניקח $\alpha=2$, $\lambda=1$, $e_1=0.1$.

$$\begin{aligned}\left|e_2\right|&=\left|e_1\right|^2=0.01\\ \left|e_3\right|&=\left|e_2\right|^2=10^{-4}\end{aligned}$$

וכן הלאה.

מספר הספרות המדוייקות מוכפל בכל איטרציה. כמו כן, אין חשיבות לערך של λ, וההתכנסות הרבה יותר מהירה מהמקרה הלינארי.

משפט 1.2 נניח שנתונה איטרציית נקודת שבת שמתכנסת:

$$g \in C^2, x_{n+1} = g\left(x_n\right), x_n \to r$$

אזי אם $0 < \left|g'\left(r\right)\right| < 1$ אזי קצב ההתכנסות לינארי ($\alpha = 1$) עם $\lambda = \left|g'\left(r\right)\right|$. אם $g'\left(r\right) = 0$, אז קצב ההתכנסות לפחות ריבועי $\alpha \geq 2$.

הוכחה: ראשית נניח כי $0 < \left|g'\left(r\right)\right| < 1$. נחשב:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{x_{n+1} - r}{x_n - r} = \frac{g\left(x_n\right) - g\left(r\right)}{x_n - r} = g'\left(\eta_n\right), \eta_n \in \left[x_n, r\right]$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|g'\left(\eta_n\right)\right| = \left|g'\left(r\right)\right|$$

כעת נניח כי $g'\left(r\right) = 0$. נפתח טיילור:

$$g\left(x_n\right) = g\left(r\right) + \underbrace{g'\left(r\right)}_{=0}\left(x_n - r\right) + \frac{g''\left(\eta_n\right)\left(x_n - r\right)^2}{2}$$

ולכן

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = g\left(x_n\right) - g\left(r\right) = \frac{g''\left(\eta_n\right)\left(x_n - r\right)^2}{2}$$

כלומר

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|e_{n+1}\right|}{\left|e_n\right|^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|g\left(x_n\right) - g\left(r\right)\right|}{\left|x_n - r\right|^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}g''\left(\eta_n\right) = \frac{1}{2}g''\left(r\right)$$

כלומר סדר ההתכנסות תלוי בהתאפסות $g''\left(r\right)$. ■

דוגמא נניח ששיטת המיתר מתכנסת, $f'\left(r\right) \neq 0$, $f''\left(r\right) \neq 0$. אזי קצב ההתכנסות של שיטת המיתר הוא $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
האיטרציה היא

$$x_{n+1} = x_n - f\left(x_n\right)\frac{x_n - x_{n-1}}{f\left(x_n\right) - f\left(x_{n-1}\right)}$$
$$e_{n+1} = e_n - f\left(x_n\right)\frac{e_n - e_{n-1}}{f\left(x_n\right) - f\left(x_{n-1}\right)} =$$
$$= \frac{e_n\left(f\left(x_n\right) - f\left(x_{n-1}\right)\right) - f\left(x_n\right)\left(e_n - e_{n-1}\right)}{f\left(x_n\right) - f\left(x_{n-1}\right)} = \frac{f\left(x_n\right)e_{n-1} - f\left(x_{n-1}\right)e_n}{f\left(x_n\right) - f\left(x_{n-1}\right)}$$

מפיתוח טיילור:

$$f\left(x_n\right)=f\left(r+e_n\right)=f\left(r\right)+f'\left(r\right)e_n+\frac{1}{2}f''\left(r\right)e_n^2$$

את השארית נזניח. המכנה:

$$f\left(x_n\right)-f\left(x_{n-1}\right)\approx f'\left(r\right)\left(e_n-e_{n-1}\right)$$

המונה:

$$\begin{aligned}\left(f'\left(r\right)e_n+\frac{1}{2}f''\left(r\right)e_n^2\right)e_{n-1}-\left(f'\left(r\right)e_{n-1}+\frac{1}{2}f''\left(r\right)e_{n-1}^2\right)e_n=\\=\frac{1}{2}f''\left(r\right)e_ne_{n-1}\left(e_n-e_{n-1}\right)\end{aligned}$$

בסך הכל

$$e_{n+1}=\frac{f''\left(r\right)e_ne_{n-1}}{2f'\left(r\right)}$$

ניזכר כי לפי הגדרת קצב התכנסות:

$$e_{n+1}\approx\lambda e_n^{\alpha}\approx\lambda^{\alpha+1}e_{n-1}^{\alpha^2}\approx\dots$$

ולכן

$$\begin{aligned}\frac{f''\left(r\right)e_ne_{n-1}}{2f'\left(r\right)}\approx e_{n+1}\approx\frac{f''\left(r\right)}{2f'\left(r\right)}\lambda e_{n-1}^{\alpha}e_{n-1}&=\frac{\lambda e_{n-1}^{\alpha+1}f''\left(r\right)}{2f'\left(r\right)}\\\lambda^{\alpha+1}e_{n-1}^{\alpha^2}&=\frac{\lambda e_{n-1}^{\alpha+1}f''\left(r\right)}{2f'\left(r\right)}\\\lambda^{\alpha}&=\frac{f''\left(r\right)}{2f'\left(r\right)}\end{aligned}$$

ומתקיים

$$\begin{aligned}\alpha^2&=\alpha+1\\\alpha&=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

בשביל התכנסות צריך את החיובי.