אנליזה נומרית 1

© ארזים

26 במרץ 2017

1 מציאת שורשים

1.1 שיטת False Position

נניח שהפונקציה לינארית באיזור השורשת ונסתכל בנקודה בה הישר המקרב את הפונקציה חות אך ציר x:

$$l\left(x\right)=f\left(a_{n}\right)+\frac{f\left(b_{n}\right)-f\left(a_{n}\right)}{b_{n}-a_{n}}\left(x-a_{n}\right)$$

נפתור עבור $l\left(x\right)=0$:

$$x-a_{n}=-\frac{f\left(a_{n}\right)\left(b_{n}-a_{n}\right)}{f\left(b_{n}\right)-f\left(a_{n}\right)}$$
$$x_{n}=\frac{f\left(b_{n}\right)a_{n}-f\left(a_{n}\right)b_{n}}{f\left(b_{n}\right)-f\left(a_{n}\right)}$$

וזהו הניחוש הבא שלנו. מעדכנים את a_n או b_n כך שהשורש עדיין בקטע $[a_n, b_n]$.
יכולה להיות כאן בעיה - השיטה עשויה להתכנס הרבה יותר לאט מאשר שיטת החציה.

1.2 שיטת המיתר

נוותר על הדרישה שהשורש יהיה בקטע $[a_n, b_n]$. נגדיר את x_{n+1} להיות החיתוך עם ציר x של הישר שעובר דרך $f\left(x_{n}\right),f\left(x_{n-1}\right)$. הנוסחה יוצאת דומה מאוד לקודם. נשים לב כי קיבלנו בערך את המשוואה:

$$x_{n+1}=x_{n}-\frac{f\left(x_{n-1}\right)}{f'\left(x_{n}\right)}$$

1.3 שיטת ניוטון רפסון

כאן נקבע

$$x_{n+1}=x_{n}-\frac{f\left(x_{n}\right)}{f'\left(x_{n}\right)}$$

אינטואיציה גיאומטרית ־ נבצע קירוב לינארי לפונקציה. נשים לב כי כאן, $x_{n+1}=g(x_n)$, ומתקיים $g(r)=r \iff f(r)=0$. לכן זו למעשה איטרצית נקודות שבת.

דוגמא נחשב $\sqrt[m]{a}$ על ידי פתרון $x^m=a$. נגדיר $f(x)=x^m-a$, $f'(x)=mx^{m-1}$. אזי

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{x^m-a}{mx^{m-1}}=x-\frac{x}{m}+\frac{a}{mx^{m-1}}=\frac{1}{m}\left(\frac{a}{x^{m-1}}+(m-1)x\right)$$

האיטרציות הן

$$x_{n+1}=\frac{1}{m}\left(\frac{a}{x_n^{m-1}}+(m-1)x_n\right)$$

עבור $m=2,a=2$, שורש ריבועי, נקבל

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_n}+x_n\right)$$

האיטרציות המתקבלות הן

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2\\
x_1 &= 1.5\\
x_2 &= 1.416666\\
x_3 &= 1.414215686\\
x_4 &= 1.414213562\\
x_5 &= 1.414213562
\end{aligned}$$

וזה כבר מה שמחשבון יראה אם נחשב את $\sqrt{2}$. השאלה כאן היא איך לדעת באופן כללי מתי לעצור. באופן כללי לא מוטח כלל שהיא אפילו תתכנס. נראה שאם מתחילים קרוב מספיק לשורש אז השיטה מתכנסת.

1.4 שיטת Fail Safe

נשלב בין שיטת ניוטון ושיטת החצייה.

רעיון נבצע צעד חצייה בכל פעם שצעד ניוטון נכשל.

נניח שמתחילים מהקטע (a,b), כאשר $f(a)f(b)<0$. בכל צעד, אם x השיערוך הנוכחי לשורש, נחשב שיערוך חדש x' ונעדכן את a או b לפי

1. אם צעד ניוטון $x'=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ נמצא בקטע (a,b), נקבל את x'. אחרת נגדיר $x'=\frac{a+b}{2}$.
2. מעדכנים $a=x'$ או $b=x'$ כך שעדיין יתקיים $f(a)f(b)<0$.

x' נופל בקטע (a,b) אם מתקיים

$$((x-a)f'(x)-f(x))((x-b)f'(x)-f(x))<0$$

2 איטרציות נקודת שבת

בשיטת ניוטון מצאנו $g(x)$ וחישבנו $x_{n+1} = g(x_n)$. הנטרה היא למצוא סדרה $x_n \to r$, עם $f(r) = 0$. אם נניח כי g רציפה, נקבל כי $g(r) = r$, כלומר r נקודת שבת של g.

נרצה למצוא פונקציה g כך שמתקיים $f(r) = 0$ אם ורק אם $g(r) = r$. יש אינסוף כאלה ־ $x + f(x)$, $x - f(x)$, וכן הלאה. נחפש איטרציות שיתכנסו מהר לפתרון.

דוגמא נפתור את $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$. נגדיר כמה איטרציות:

$$g_1(x) = x - f(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$$

$$g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$$

$$g_3(x) = \frac{\sqrt{10 - x^3}}{2}$$

$$g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{x + 4}}$$

$$g_5(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$$

השורש עצמו הוא $r = 1.365230013$. התחלנו עם $x = 1.5$. בהרצה, ראינו שהאיטרציה g_1 מתפוצצת ומתרחקת מהפתרון יותר ויותר, g_2 נתקעת די רחוק מהשורש, g_3 מתכנסת אבל מאוד לאט, g_4 מרוויחה בערך ספרה בכל צעד עד להתכנסות, g_5 התכנסה תוך שלושה צעדים.

נתבונן בערכי הנגזרות בשורש:

$$g_1'(r) = -15.5$$

$$g_2'(r) = -3.43$$

$$g_3'(r) = 0.51$$

$$g_4'(r) = -0.1272$$

$$g_5'(r) = 0$$

נוכיח שבשביל התכנסות צריך $|g'(r)| < 1$, וככל שאגף שמאל קטן יותר נקבל התכנסות מהירה יותר.

משפט 2.1 (משפט נקודת השבת) תהי $g \in C^1[a,b]$ ונניח שמתקיים $g(x) \in [a,b]$ לכל $x \in [a,b]$. אזי יש לפונקציה g נקודת שבת בקטע $[a,b]$. אם $|g'(x)| \le k < 1$ אז יש נקודת שבת יחידה בקטע של הפונקציה g, ולכל $x_0 \in [a,b]$, הסדרה $x_{n+1} = g(x_n)$ מתכנסת לנקודת השבת.

הוכחה: אם $g(a) = a, g(b) = b$ ־ אחד משניהם ־ סיימנו. אחרת, $g(a) > a, g(b) < b$ ולכן אם נגדיר $h(x) = g(x) - x$ נקבל $h(a) = g(a) - a > 0$, $h(b) = g(b) - b < 0$, ולכן קיימת $r \in [a,b]$ עם $h(r) = 0$, כלומר $r = g(r)$, וזו נקודת שבת.

תחת התנאי על הנגזרת ־ נוכיח את יחידות נקודת השבת. יהיו r_1, r_2 נקודות שבת. אזי $h(r_1) = 0, h(r_2) = 0$ ולכן ממשפט רול קיימת $c \in (r_1, r_2)$ עם $h'(c) = 0$, כלומר

$$g'(c) - 1 = 0$$

בסתירה לתנאי על הנגזרת. כעת, נראה את ההתכנסות שתיארנו. g מעתיקה את $[a,b]$ לעצמו, האיטרציות $x_{n+1}=g(x_n)$ מוגדרות לכל $x_0\in[a,b]$. אזי

$$|x_n-r|=|g(x_{n-1})-g(r)|=|g'(\eta)(x_{n-1}-r)|\le k|x_{n-1}r|$$

כך נוכל להמשיך, עד שנקבל

$$|x_n-r|\le k^n|x_0-r|$$

וזה שואף לאפס. ■

הבעייה שלנו היא שמציאת הקטע $[a,b]$ שיקיים את תנאי המשפט היא קשה.

משפט 2.2 נניח כי $g\in C^1[a,b]$, r נקודת שבת של g.

1. אם $|g'(r)|<1$ אזי קיים ε כל שלכל $x_0\in[r-\varepsilon,r+\varepsilon]$, האיטרציות $x_{n+1}=g(x_n)$ מתכנסות אל r.
2. אם $|g'(r)|>1$ אזי הטירציות מתבדרות (אלא אם במקרה $x_n=r$).

הוכחה:

1. על פי המשפט הקודם, יש להוכיח שקיים $I_\varepsilon=[r-\varepsilon,r+\varepsilon]$ המקיים $g(I_\varepsilon)\subseteq I_\varepsilon$,

$$\max_{x\in I_\varepsilon}|g'(x)|\le k<1$$

נתחיל מהתנאי השני. מרציפות הנגזרת, כיוון שמתקיים $g'(r)<1$, יש סביבה של r, שנסמנה I_ε, שבה התנאי על הנגזרת מתקיים. עבור התנאי הראשון, ניקח $x\in I_\varepsilon$, כלומר $|x-r|\le\varepsilon$, ואז

$$|g(x)-r|=|g(x)-g(r)|=|g'(c)(x-r)|\le k|x-r|<|x-r|<\varepsilon$$

ולכן $g(x)\in I_\varepsilon$. ממשפט נקודת השבת נובע כי $x_n\to r$.

2. ראינו כי $|x_n-r|=|g'(\eta_n)(x_{n-1}-r)|$, נניח בשלילה כי $x_n\to r$ ונקבל כי מסנדוויץ $\eta_n\to r$. כך נקבל כי

$$g'(\eta_n)\to g'(r)>1$$

לכן עבור n גדול מספיק מתקיים $|x_n-r|>|x_{n-1}-r|$, ולכן אין התכנסות.

■

משפט 2.3 (התכנסות של ניוטון רפסון) תהי $f\in C^2[a,b]$, $r\in[a,b]$ עם $f(r)=0$, $f'(r)\neq 0$. אזי קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $x_0\in[r-\varepsilon,r+\varepsilon]$ האיטרציות $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ מתכנסות לשורש r.

הוכחה: נגדיר $g\left(x\right)=x-\frac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)}$. נגזור:

$$g'\left(x\right)=1-\frac{f'\left(x\right)^{2}-f\left(x\right)f''\left(x\right)}{f'\left(x\right)^{2}}=\frac{f\left(x\right)f''\left(x\right)}{f'\left(x\right)^{2}}$$

נציב r:

$$g'\left(r\right)=\frac{f\left(r\right)f''\left(r\right)}{f'\left(r\right)^{2}}=0$$

■