אנליזה נומרית 1

ארזים ©

23 במרץ 2017

1 מציאת שורשים

1.1 שיטת החצייה

בשיעור שעבר דיברנו על שיטת החצייה. ראינו כי

$$|x_n - r| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

ולכן כדי להשיג דיוק מוחלט ε צריך לבצע מספיק איטרציות בשביל שיתקיים

$$|x_n - r| \leq \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$$
$$n > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

נותר רק להחליט מתי לעצור את האלגוריתם.

1.1.1 קריטריון עצירה

1. תנאי שגוי - $f(x_n) = 0$. גם עבור השורש, ייתכן שיתקיים $f(r) \neq 0$ בגלל שגיאות עיגול בדיוק כפול, אם בכלל ניתן לייצג את השורש בדיוק כפול.
2. אפשר לרוץ עד שמתקיים $|f(x_n)| < tol$, כאשר tol ערך קטן ששולט על הדיוק שאנחנו רוצים. זה לא עובד: נגדיר

$$f_1(x) = 2\cos x - x$$
$$f_2(x) = 10^{10} f_1(x)$$
$$f_3(x) = 10^{-10} f_1(x)$$

על כולן נעשה את אותה סדרת חצייה. אבל אם $|f_1(x)| < tol$, יכול עדיין להתקיים $|f_2(x)| \gg tol$, ולכן נעשה צעדים מיותרים. f_3 תעצור מוקדם מדי.

3. אפשר לרוץ עד דיוק יחסי רצוי:

$$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}\right| < tol$$

תנאי זה לא עובד בסביבת אפס.

4. בעזרת החסם מהמשפט: $|x_n - r| \le \frac{b-a}{2^n}$. נבחר את n כך שהחסם המוחלט על הסטייה מהשורש יהיה כמו שנרצה. כלל אצבע טוב:

$$tol = \varepsilon_M \left(\frac{|a|+|b|}{2}\right)$$

זה החסם שנרצה על אורך הקטע בשלב n. בנוסף, אם נחסום את מספר האיטרציות על ידי 40, נקבל שהדיוק (ליד 1) הוא בערך 10^{-12}.

אפילו אם $f(x)$ קטן, אי אפשר להסיק כי x קרוב לשורש.

הגדרה 1.1 שורש α של $f(x)$ נקרא פשוט אם $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$.

נניח כי $f'(x)$ לא מתאפסת בסביבת השורש. נפתח טיילור:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\eta)(x-\alpha) = (x-\alpha) f'(\eta)$$

כאשר $\alpha \le \eta \le x$. אזי

$$x - \alpha = \frac{f(x)}{f'(\mu)}$$

נכתוב

$$f(x_n) = \tilde{f}(x_n) + \delta(x_n)$$

כאשר $\tilde{f}$ מחושב בדיוק סופי, $|\delta(x_n)| \le \delta$. קיבלנו

$$|x_n - \alpha| \le \frac{\left|\tilde{f}(x_n)\right| + |\delta|}{|f'(\eta)|}$$

במקרה הטוב ביותר $\tilde{f}(x_n) = 0$, ואז אם נניח כי $f'(\eta) \approx f'(\alpha)$, כלומר הנגזרת משתנה לאט, אזי

$$|x_n - \alpha| \le \frac{\delta}{|f'(\alpha)|}$$

כל החישוב הזה נכון לכל שיטה למציאת שורשים, ולכן אם הפונקציה בעייתית - הנגזרת בשורש קטנה - אי אפשר להגיע לדיוק טוב.

הגדרה 1.2 α שורש מריבוי q אם $f\left(\alpha\right)=0,f'\left(\alpha\right)=0,\ldots,f^{\left(q-1\right)}\left(\alpha\right)=0,f^{\left(q\right)}\left(\alpha\right)\neq0$.

מטיילור

$$f\left(x\right)=\frac{1}{q!}f^{\left(q\right)}\left(\eta\right)\left(x-\alpha\right)^{q}$$

כמו קודם נקבל

$$\left|x-\alpha\right|\leq\left(\frac{q!\delta}{f^{\left(q\right)}\left(\alpha\right)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

דוגמא $f\left(x\right)=\left(x-2\right)x+1=0$. למשוואה יש שורש כפול בנקודה $x=1$. נחשב בדיוק אינסופי:

$$f\left(1+\varepsilon\right)=\left(\varepsilon-1\right)\left(1+\varepsilon\right)+1=\varepsilon^{2}$$

נניח שמתמשים בשמונה ספרות דיוק, אזי

$$fl\left(1-\varepsilon^{2}\right)=1$$

כאשר $\left|\varepsilon\right|\leq\frac{2}{\sqrt{2}}10^{-4}$. אזי אם

$$0.9992999\leq x\leq1.0000707$$

הערך של $f\left(x\right)$ יהיה 0.