אנליזה נומרית 1

ארזים ©

22 ביוני 2017

1 אינטגרציה נומרית

היינו באמצע הוכחת השגיאה באינטגרציה נומרית. השגיאה הייתה

$$\int_a^b f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\omega_k f(x_k)=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b p_n^2(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

עבור $f\in C^2[a,b]$, $\{p_n\}$ אורתגונליים ביחס למשקל ρ ומתוקנים. **הוכחה:** סימנו את Q_n פולינום האינטגרפולציה בנקודות $x_0,\dots,x_n$, ואז

$$f(x)-Q_n(x)=E_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

קיבלנו

$$f[x_0,\dots,x_n,x]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

וכעת

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\omega_k f(x_k)&=\int_a^b f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\omega_k Q_n(x_k)=\\&=\int_a^b f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b Q_n(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x=\\&=\int_a^b (f(x)-Q_n(x))\rho(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f[x_1,\dots,x_n,x]\,p_n(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

כעת, נעזר בנוסחת ההפרשים המחולקים:

$$\begin{aligned}f[x,x_1,\dots,x_n,y_1]&=\frac{f[x,x_1,\dots,x_n]-f[x_1,\dots,x_n,y_1]}{x-y_1}\\f[x,x_1,\dots,x_n]&=(x-y_1)\,f[x,x_1,\dots,y_1]+f[x_1,\dots,x_n,y_1]\end{aligned}$$

כעת השגיאה היא

$$E=\int\limits_a^b \left(\left(x-y_1\right) f\left[x,x_1,\ldots,x_n,y_1\right]+f\left[x_1,\ldots,x_n,y_1\right]\right) p_n\left(x\right)\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

הגורם הימני, כשנפתח סוגריים, יהיה קבוע כפול האינטגרל של p_n, ולכן יתאפס. אם כן,

$$E=\int\limits_a^b \left(x-y_1\right) f\left[x,x_1,\ldots,x_n,y_1\right] p_n\left(x\right)\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

נמשיך להוסיף נקודות, ונקבל

$$E=\int\limits_a^b \prod_{i=1}^{k}\left(x-y_i\right) f\left[x,x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_k\right] p_n\left(x\right)\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

על ידי בדיוק אותו חישוב. נוכל להמשיך ככה כל עוד יהיו לנו אינטגרלים לאפס (בפתיחת סוגריים), כלומר עד שיש n נקודות נוספות. בסך הכל:

$$E=\int\limits_a^b \prod_{k=1}^{n}\left(x-y_k\right) f\left[x,x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\right] p_n\left(x\right)\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

נבחר $y_i=x_i$, ונקבל

$$\begin{aligned}E&=\int\limits_a^b \prod_{k=1}^{n}\left(x-x_k\right)\cdot p_n\left(x\right) f\left[x,x_1,\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_n\right]\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\\&=\int\limits_a^b f\left[x,x_1,\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_n\right] p_n^2\left(x\right)\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b \frac{f^{(2n)}\left(\eta\left(x\right)\right)}{(2n)!}p_n^2\left(x\right)\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\\&=\frac{f^{(2n)}\left(\xi\right)}{(2n)!}\int\limits_a^b p_n^2\left(x\right)\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

■

כעת, נניח שיש לנו את הפולינומים האורתוגונליים עבור ρ על $[-1,1]$ ונראה איך להשתמש בהם בשביל לבצע אינטגרציה על $[a,b]$, כולל להעריך שגיאה. לא נכתוב את

ρ, אבל כל החישובים עובדים גם עם ρ.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}\right)}_{g(t)}\mathrm{d}t \approx$$
$$\approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k g(t_k)$$

כאשר t_k השורשים הרלוונטיים בקטע $[-1,1]$. כלומר,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k f\left(\frac{b-a}{2}t_k+\frac{a+b}{2}\right)$$

נחשב שגיאה.

$$\int_a^b f(x) - \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k f\left(\frac{b-a}{2}t_k+\frac{a+b}{2}\right) = \frac{b-a}{2}\left(\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n}\omega_k g(t_k)\right) =$$
$$= \frac{b-a}{2}\frac{g^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^{1} p_n^2(t)\,\mathrm{d}t$$

מתקיים

$$g(t) = f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}\right)$$
$$g^{(2n)}(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n} f^{(2n)}\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}\right)$$

ולכן נקבל

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k f\left(\frac{b-a}{2}t_k+\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1}\frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\int_{-1}^{1} p_n^2(t)\,\mathrm{d}t$$