אנליזה נומרית 1

© ארזים

18 ביוני 2017

1 אינטגרציית גאוס

דיברנו על פולינומי לז'נדר ועל התכונות שלהם.

משפט 1.1 יהיו $x_1,\dots,x_n$ השורשים של p_n, ויהיו

$$w_k=\int\limits_{-1}^{1}\prod_{i\neq k}\frac{(x-x_i)}{x_k-x_i}\,\mathrm{d}x$$

מעלת הדיוק של כלל האינטגרציה

$$\sum_{i=1}^{n}w_if\left(x_i\right)$$

היא $2n-1$.

הוכחה: יהי $p\left(x\right)$ פולינום ממעלה לכל היותר $2n-1$. נכתוב

$$p\left(x\right)=q\left(x\right)p_n\left(x\right)+r\left(x\right)$$

כאשר $q\left(x\right),r\left(x\right)$ הם ממעלה לכל היותר $n-1$. אזי

$$\int\limits_{-1}^{1}p=\int\limits_{-1}^{1}qp_n+\int\limits_{-1}^{1}r=\int\limits_{-1}^{1}r$$

$$\sum_{k=1}^{n}w_kp\left(x_k\right)=\sum_{k=1}^{n}w_kq\left(x_k\right)p_n\left(x_k\right)+\sum_{k=1}^{n}w_kr\left(x_k\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}w_kr\left(x_k\right)=\int\limits_{-1}^{1}r\,\mathrm{d}x$$

השוויון האחרון נכון כי ראינו שכל כלל אינטגרציה הוא בעל מעלת דיוק לפחות $n-1$, ולכן סיימנו. ■

1.1 פולינומים אורתונורמליים

למה 1.2 פולינומי צ'בישב מקיימים

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 0$$

עבור $n \neq m$. ניזכר

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

הוכחה: נגדיר $\phi = \arccos x \in [0,\pi]$. לכן $x = \cos\phi$, ואז $\mathrm{d}x = -\sin\phi \mathrm{d}\phi$, כלומר

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\phi$$

נציב ונקבל

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{\pi} \cos(n\phi)\cos(m\phi)\ \mathrm{d}\phi = 0$$

■

הגדרה 1.3 נגדיר מכפלה פנימית על (a,b) עם פונקציית משקל $f(x) > 0$:

$$\langle g, h\rangle = \int_{a}^{b} g(x)\, h(x)\, f(x)\ \mathrm{d}x$$

הגדרה 1.4 g, h ניצבים אם $\langle g, h\rangle = 0$.

הגדרה 1.5 $\{p_n(x)\}$ היא סדרת פולינומים אורתוגונליים אם p_n פולינום ממעלה n ולכל $i \neq j$ מתקיים $\langle p_i, p_j\rangle = 0$.

למה 1.6 תהי $\{p_n(x)\}$ משפחה כלשהי של פונקציות אורתוגונליות ביחס לפונקציית משקל כלשהי. אזי לכל פולינום p ממעלה לכל היותר n קיימים מקדמים $a_0, \ldots, a_k$ המקיימים

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j p_j(x)$$

למה 1.7 תהי $\{p_n(x)\}$ משפחה כלשהי של פונקציות אורתוגונליות ביחס לפונקציית משקל כלשהי. אזי כל פולינום ממעלה לכל היותר $k-1$ ניצב לפולינום p_k.

למה 1.8 תהי $\{p_n(x)\}$ משפחה כלשהי של פונקציות אורתוגונליות ביחס לפונקציית משקל כלשהי. אזי לפולינום $p_k(x)$ יש k שורשים פשוטים בקטע (a,b).

את הדברים הללו הוכחנו לפולינומי לז'נדר, ואותה הוכחה עובדת גם כאן.

למה 1.9 תהי $\{p_n(x)\}$ משפחה כלשהי של פונקציות אורתוגונליות ביחס לפונקציית משקל כלשהי. נניח כי $p_n = 1$. אזי

$$p_{n+1} = (x-\beta_n)\, p_n(x) - \gamma_n^2 p_{n-1}(x)$$

עם תנאי התחלה $p_0(x) = 1$, $p_{-1}(x) = 0$. המקדמים נתונים על ידי

$$\beta_n = \frac{\langle xp_n, p_n\rangle}{\langle p_n, p_n\rangle}$$
$$\gamma_n^2 = \frac{\langle p_n, p_n\rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1}\rangle}$$

כאשר $\gamma_0 = 1$.

הוכחה: באינדוקציה. נניח שבנינו את $p_0,\dots,p_n$, ונבנה את p_{n+1}, מתוקן שאורתוגונלי לכל הקודמים. הפולינום $p_{n+1} - xp_n$ הוא ממעלה n ולכן

$$p_{n+1} = xp_n - \sum_{j=0}^{n} c_j p_j$$

עבור $0 \le j \le n$ מתקיים

$$0 = \langle p_{n+1}, p_j\rangle = \langle xp_n, p_j\rangle - \sum_{i=0}^{n} c_i \langle p_i, p_j\rangle$$

ומכאן

$$\langle xp_n, p_j\rangle = c_j \langle p_j, p_j\rangle$$

לכן c_j נקבע ביחידות. כעת, $\langle xp_n, p_j\rangle = \langle p_j, xp_n\rangle$, מההגדרה, והפולינום xp_j הוא ממעלה $j+1$. לכן $\langle p_n, xp_j\rangle = 0$ עבור $n > j+1$. לכן עבור $j < n-1$ מתקיים $c_j = 0$. לכן למעשה קיבלנו

$$p_{n+1} = xp_n - c_n p_n - c_{n-1} p_{n-1} = (x - c_n)\, p_n - c_{n-1} p_{n-1}$$

כאשר

$$c_n = \beta_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle}$$
$$c_{n-1} = \gamma_n^2 = \frac{\langle xp_n, p_{n-1} \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}$$

נפשט את האחרון:

$$\frac{\langle xp_n, p_{n-1} \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle} = \frac{\langle p_n, xp_{n-1} \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}$$

כעת

$$\langle p_{n+1}, p_{n+1} \rangle = \langle p_{n+1}, xp_n \rangle - \sum_{i=0}^{n} c_i \underbrace{\langle p_i, p_{i+1} \rangle}_{0}$$

ומכאן נקבל בדיוק מה שרצינו בניסוח הלמה. ■

ראינו שעבור פולינומי לז'נדר פונקציית המשקל היא $\rho(x) = 1$. עבור פולינומי צ'בישב היא $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

דוגמה נחשב את

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$$

נשים לב שיש סינגולריות בקצות הקטע. לכן נכתוב

$$\int_{-1}^{1} e^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$$

זו מכפלה פנימית לפי פונקציית המשקל $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. לכן נחפש כלל אינטגרציה מהצורה

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, \rho(x) \, \mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$$

הבעיות שנוצרות הן עם פונקציות עם סינגולריות ועם קטעים אינסופיים. באופן כללי, עבור כל פונקציית משקל $\rho(x)$ מתקיים:

1. לכל $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ מעלת הדיוק היא לכל היותר $2n-1$.
2. מעלת הדיוק שווה ממש $2n-1$ אם x_k הורשים של $p_n(x)$ שאורתוגונליים ביחס למשקל $\rho(x)$.

יש גם את פולינומי הרמיט, שעובדים כאשר $\rho\left(x\right)=e^{-x^{2}}$, המוגדרים על ידי

$$H_{n}\left(x\right)=2xH_{n-1}\left(x\right)-2\left(n-1\right)H_{n-1}\left(x\right)$$

משפט 1.10 נניח כי $f\in C^{2n}\left[a,b\right]$, וכי $\left\{ x_{k},w_{k}\right\} _{k=1}^{n}$ משקלות ונקודות המתאימות לפונקציית משקל ρ. נניח כי p_{n} מנורמלים כך שהם מתוקנים. אזי

$$\int\limits_{a}^{b}f\left(x\right)\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}w_{k}f\left(x_{k}\right)=\frac{f^{\left(2n\right)}\left(\xi\right)}{\left(2n\right)!}\int\limits_{a}^{b}p_{n}^{2}\left(x\right)\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

הוכחה: נשתמש בשגיאה באינטרפולצייה. נעביר פולינום אינטרפולציה בצורת ניוטון דרך $x_{0},\ldots,x_{n}$ ונקרא לו $Q_{n}\left(x\right)$, ודרך $x_{0},\ldots,x_{n},\tilde{x}$ ($\tilde{x}$ כלשהי) ונקרא לו $Q_{n+1}\left(x\right)$. כעת

$$Q_{n+1}\left(x\right)=f\left[x_{0}\right]+\sum_{i=1}^{n}f\left[x_{0},\ldots,x_{i}\right]\prod_{j=0}^{i-1}\left(x-x_{j}\right)+f\left[x_{0},\ldots,x_{n},\tilde{x}\right]\prod_{j=0}^{n}\left(x-x_{j}\right)$$

כעת, $Q_{n+1}\left(\tilde{x}\right)=f\left(\tilde{x}\right)$ נקבל

$$E_{n}\left(\tilde{x}\right)=f\left(\tilde{x}\right)-Q_{n}\left(\tilde{x}\right)=Q_{n+1}\left(\tilde{x}\right)-Q_{n}\left(\tilde{x}\right)=f\left[x_{0},\ldots,x_{n},\tilde{x}\right]\prod_{j=0}^{n}\left(\tilde{x}-x_{j}\right)$$

אבל אנחנו מכירים ביטוי לשגיאה מאינטרפולציה:

$$f\left[x_{0},\ldots,x_{n},\tilde{x}\right]\prod_{j=0}^{n}\left(\tilde{x}-x_{j}\right)=E_{n}\left(\tilde{x}\right)=\frac{f^{\left(n+1\right)}\left(\xi\right)}{\left(n+1\right)!}\prod_{j=0}^{n}\left(\tilde{x}-x_{j}\right)$$

ולכן

$$f\left[x_{0},\ldots,x_{n},\tilde{x}\right]=\frac{f^{\left(n+1\right)}\left(\xi\right)}{\left(n+1\right)!}$$

כעת נגדיר הפרש מחולק עם נקודה כפולה על ידי גבול

$$f\left[x_{0},x_{0}\right]=\lim_{x_{1}\to x_{0}}\frac{f\left[x_{1}\right]-f\left[x_{0}\right]}{x_{1}-x_{0}}=f'\left(x_{0}\right)$$

$$f\left[x_{0},x_{0},x_{1}\right]=\frac{f'\left(x_{0}\right)-f\left[x_{0},x_{1}\right]}{x_{0}-x_{1}}$$

כעת, יהי $p_{n}\left(x\right)$ פולינום אורתוגונלי ממעלה n שמתאים למשקל $\rho\left(x\right)$. נסמן $x_{1},\ldots,x_{n}$ את שורשיו, משמע

$$p_{n}\left(x\right)=\prod_{j=1}^{n}\left(x-x_{j}\right)$$

כעת

$$\int_a^b f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) = \int_a^b f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} w_k Q_n(x_k) =$$

$$= \int_a^b f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b Q_n(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

וזאת בגלל מעלת הדיוק. נמשיך:

$$= \int_a^b (f(x) - Q_n(x))\rho(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f[x_1,\ldots,x_n,x]\,p_n(x)\rho(x)$$

ניזכר כעת שמתקיים מאורתוגונליות

$$\int_a^b p_n(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b p_n(x)p_0(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

כעת, לפי נוסחת ההפרשים המחולקים:

$$f[x,x_1,\ldots,x_n,y_1] = \frac{f[x,x_1,\ldots,x_n] - f[x_1,\ldots,x_n,y_1]}{x-y_1}$$

$$f[x,x_1,\ldots,x_n,y_1](x-y_1) = f[x,x_1,\ldots,x_n] - f[x_1,\ldots,x_n,y_1]$$

ניקח אינטגרל:

$$E = \int_a^b ((x-y_1) f[x,x_1,\ldots,x_n,y_1] + f[x_1,\ldots,x_n,y_1])\,p_n(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b (x-y_1) f[x,x_1,\ldots,x_n,y_1]\,p_n(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

■