אנליזה נומרית 1

© ארזים

18 ביוני 2017

1 אינטגרציית גאוס

הגדרנו את פולינומי לז'נדר:

$$p_n\left(x\right)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)$$

למה 1.1 הפולינום p_n אורתוגונליים, משמע

$$\int_{-1}^{1}p_n\left(x\right)p_m\left(x\right)\,\mathrm{d}x=0$$

כאשר $n\neq m$.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות, $m<n$. נשמיט את הקבועים מהגדרת הפולינומים:

$$\begin{aligned}I_{m,n}&=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\left(x^2-1\right)^m\right)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)\,\mathrm{d}x=\\&=\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\left(x^2-1\right)^m\right)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)\,\mathrm{d}x\,|_{-1}^{1}-\\&-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}\left(\left(x^2-1\right)^m\right)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

הגורם הראשון כאן מתאפס, כי שתי הנגזרות מתאפסות בנקודות ± 1. נבצע עוד אינטגרציות בחלקים עד שנקבל

$$I_{m,n}=\left(-1\right)^n\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}\left(\left(x^2-1\right)^m\right)\left(x^2-1\right)^n\,\mathrm{d}x$$

אבל $m+n>2m$ ולכן הגזירה הראשונה מתאפסת. ■

מההגדרה אפשר לחשב את הפולינומים, אבל הם מקיימים את הנוסחה הרקורסיבית הנוחה הבאה:

$$p_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xp_n(x)-\frac{n}{n+1}p_{n-1}(x)$$

למה 1.2

$$\int_{-1}^{1}p_n^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1}$$

הוכחה:

$$\begin{gathered}(n+1)\,p_{n+1}(x)-(2n+1)\,xp_n(x)+np_{n-1}(x)=0\\ np_n(x)-(2n-1)\,xp_{n-1}(x)+(n-1)\,p_{n-2}(x)=0\end{gathered}$$

נכפול את המשוואה הראשונה פי p_{n-1}, ואת השנייה פי p_n, וניקח אינטגרל - נזכור שהאינגרל של מכפלת שני פולינומים מאינדקסים שונים היא 0 ונקבל

$$\begin{gathered}-(2n+1)\int_{-1}^{1}xp_n(x)\,p_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x+n\int_{-1}^{1}p_{n-1}^2(x)\,\mathrm{d}x=0\\ n\int_{-1}^{1}p_n^2(x)\,\mathrm{d}x-(2n-1)\int_{-1}^{1}xp_n(x)\,p_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x=0\end{gathered}$$

כלומר נקבל

$$\begin{gathered}(2n+1)\int_{-1}^{1}xp_np_{n-1}=n\int_{-1}^{1}p_{n-1}^2\\ (2n-1)\int_{-1}^{1}xp_np_{n-1}=n\int_{-1}^{1}p_n^2\end{gathered}$$

נחלק את המשוואות ונקבל

$$(2n+1)\int_{-1}^{1}p_n^2=(2n-1)\int_{-1}^{1}p_{n-1}^2$$

ומכאן ממשיכים באינדוקציה:

$$(2n-1)\int_{-1}^{1}p_{n-1}^2=(2n-3)\int_{-1}^{1}p_{n-2}^2=\cdots=\int_{-1}^{1}p_0^2\,\mathrm{d}x=2$$

ומכאן

$$\int_{-1}^{1}p_n^2=\frac{2}{2n+1}$$

■

מנוסחת הרקורסיה, נקבל שעבור n זוגי, p_n מכיל רק חזקות זוגיות, ועבור n אי זוגי, p_n מכיל רק חזקות אי זוגיות. לכן

$$p_n(x)=(-1)^n p_n(-x)$$

כמו כן, מנוסחת הרקורסיה נקבל באינדוקציה כי

$$\begin{aligned}p_n(1)&=1\\ p_n(-1)&=(-1)^n\end{aligned}$$

משפט 1.3 הפולינומים $\{p_0(x),\dots,p_n(x)\}$ מהווים בסיס למרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר n.

הוכחה: הפולינומים אורתוגונליים, ולכן בלתי תלויים. ■

מסקנה 1.4 $p_n(x)$ אורתוגונלי לכל הפולינומים ממעלה לכל היותר $n-1$. בפרט, לכל אחד מבין $\{1,x,\dots,x^{n-1}\}$.

הוכחה: יהי $q_k(x)$ פולינום ממעלה $k<n$. מהמשפט הקודם, נכתוב אותו בתור

$$q_k(x)=\sum_{j=0}^{k}a_jp_j(x)$$

ולכן

$$\int_{-1}^{1}q_k(x)\,p_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{j=0}^{k}a_j\int_{-1}^{1}p_j(x)\,p_n(x)\,\mathrm{d}x=0$$

■

משפט 1.5 לפולינום $p_n\left(x\right)$ יש n שורשים פשוטים בקטע $\left(-1,1\right)$.

הוכחה: נניח שיש לפולינום $p_n\left(x\right)$ k שורשים, שאינם בהכרח פשוטים, $x_1,\ldots,x_k$, עם ריבויים $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$. אזי $p_n\left(x\right)$ מחליף סימן בנקודות x_j שעבורן α_j אי זוגי. נגדיר

$$q\left(x\right)=\prod_{\alpha_j\,is\,odd}\left(x-x_j\right)$$

כעת, המכפלה $p_n\left(x\right)q\left(x\right)$ לא מחליף סימן בקטע $\left(-1,1\right)$, ולכן

$$\int\limits_{-1}^{1}p_n\left(x\right)q\left(x\right)\,\mathrm{d}x\neq0$$

ולכן נובע כי מעלת q היא לפחות n. מצד שני, מעלת q היא לכל היותר k, שהוא לכל היותר n. לכן נובע $k=n$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1$. ■