אנליזה נומרית 1

© ארזים

11 ביוני 2017

1 אינטגרציה נומרית

מתאימים פולינום אינטרפולציה ומבצעים אינטגרל שלו. עבור $n=1$ ראינו את כלל הטרפז, ועתה נראה את כלל סימפסון - $n=2$.

1.1 כלל סימפסון

ניקח שלוש נקודות $a=x_0, x_1 x_2=b$ עם $x_2-x_1=x_1-x_0=h$. לוקחים את פולינום האינטרפולציה ומקרבים בעזרתו את האינטגרל. מחישוב ישיר מקבלים

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right)$$

זהו כלל סימפסון. כעת נחשב את השגיאה. נפתח טור טיילור:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{6}f^{(3)}(a)+\frac{(x-a)^4}{24}f^{(4)}(a)+\dots$$

את זה נציב בכלל שקיבלנו:

$$\int_a^{a+2h} f(x)\,\mathrm{d}x = 2hf(a)+2h^3f'(a)+\frac{4}{3}h^3f''(a)+\frac{2}{3}h^4f^{(3)}(a)+\frac{16}{5}h^5f^{(4)}(a)+\dots$$

$$\begin{aligned}\frac{h}{3}\left(f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)\right) &= \frac{h}{3}\left(f(a)+4f(a)+4hf'(a)+2h^2f''(a)+\frac{2}{3}h^3f^{(3)}(a)+\frac{1}{6}h^4f^{(4)}(a)\right)+\\ &+\frac{h}{3}\left(f(a)+2hf'(a)+2h^2f''(a)+\frac{8}{3}h^3f^{(3)}(a)+\frac{2}{3}h^4f^{(4)}(a)\right)=\\ &=2hf(a)+2h^2f'(a)+\frac{4}{3}h^3f''(a)+\frac{2}{3}h^4f^{(4)}(a)+\frac{5}{18}h^5f^{(4)}(a)\end{aligned}$$

מהשוואת שני אלה נקבל כי השגיאה היא

$$-\frac{1}{90}h^5f^{(4)}(a)+\dots$$

כלומר $o\left(h^5\right)$. זה נקרא לעתים כלל "סימפסון שליש". הכחח מדוייק לפולינום ממעלה לכל היותר 3, ולא מדוייק לפולינומים ממעלה 4 ומעלה. יש כלל נוסף של סימפסון, עם ארבע נקודות, שלא משפר את השגיאה. לכן נישאר עם הכלל הזה.

1.2 כללי אינטגרציה מורכבים

נקרב את $f(x)$ על ידי פולינום אינטרפולציה למקוטעין, ומבצעים אינטגרציה בכל קטע. ראשית יש לנו את כלל הטרפז המורכב - לוקחים נקודות במרחק h, מעבירים קו בין כל שתיים סמוכות ומשתמשים בכלל הטרפז.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right) =$$

$$= h\left(f(x_0)+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right)$$

כעת נחשב את השגיאה:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{h}{2}\left(f(x_{i+1})+f(x_i)\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)$$

כעת, נוכל לכתוב

$$\min f'' \le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \le \max f''$$

ולכן קיים ξ עם

$$f''(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)$$

ואז הגיאה תהיה

$$\frac{h^3}{12}nf''(\xi)$$

אבל כמובן $h=\frac{b-a}{n}$ ולכן

$$E = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)$$

כעת נעבור לדבר על גרסה מורכבת של כלל סימפסון. כאן משתמשים בפולינום ריבועי למקוטעים, ובכל קטע משתמשים בקירוב סימפסון:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left(f(a)+4\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} f(x_{2j})+2\sum_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2j})+f(b)\right)-\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi)$$

דוגמא מהו n המינימלי הדרוש כדי לקרב את $\int_0^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x$ בדיוק של 10^{-12}?

פתרון נעבוד בשיטת הטרפז. גודל השגיאה הוא

$$|E| = \frac{b-a}{12} h^2 \left|f''(\xi)\right|$$

כאן $b-a=3$, $|f''(x)| = e^{-x} \le 1$. מקבלים כאן

$$|E| \le \frac{3}{12} h^2 \le 10^{-12}$$

ומקבלים $h = 2\cdot 10^{-6}$, כלומר $n = \frac{b-a}{h} > 1.5\cdot 10^6$. כעת נעריך עם כלל סימפסון, שם

$$|E| = \frac{b-a}{180} h^4 \left|f^{(4)}(\xi)\right| \le \frac{1}{60} h^4 < 10^{-12}$$

ואז $h < 10^{-3}$ ולכן $n > 1000$.

1.3 שגיאות עיגול

ראשית נדון בשיטת הטרפז. במקום לחשב את

$$T(h) = h\left(\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_n)\right)$$

אבל במקום זה מחשבים את

$$\tilde{T}(h) = h\left(\frac{1}{2} \tilde{f}(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{f}(x_i) + \frac{1}{2} \tilde{f}(x_n)\right)$$

נוכל לכתוב $\tilde{f}(x_i) = f(x_i)(1 - e(x_i))$, כאשר $|e(x_i)| \le \varepsilon_M$. לכן

$$\left|T(h) - \tilde{T}(h)\right| = \left|h\left(\frac{1}{2}\left(f(x_0) - \tilde{f}(x_0)\right) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) - \tilde{f}(x_i) + \frac{1}{2}\left(f(x_n) - \tilde{f}(x_n)\right)\right)\right| \le$$
$$\le h \max|f|\,\varepsilon_M n = (b-a)\,\varepsilon_M \max|f|$$

חסם זה לא תלוי בערך h (ולכן אפשר להקטין אותו כרצוננו בלי לקבל שגיאה).

1.4 אינטגרציית גאוס

כאן נדבר על אופן בחירת הנקודות x_i. בהינתן n, נבחר נקודות ומשקלים (x_i, w_i) כך שלביטוי

$$\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

מעלת דיוק מקסימלית. הראינו שעבור

$$w_l = \int_a^b \prod_{j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

מעלת הדיוק היא לפחות $n-1$.

משפט 1.1 מעלת הדיוק של כלל אינטגרציה עם n נקודות היא לכל היותר $2n-1$.

הוכחה: ניקח כלל אינטגרציה כלשהו

$$I = \sum_{i=0}^{n} w_i f\left(x_i\right)$$

ונתבונן בפולינום

$$g\left(x\right) = \prod_{j=1}^{n} \left(x-x_j\right)^2$$

מצד אחד, האינטגרל שלו חיובי ממש, ומצד שני, ההערכה שלנו תתאפס עליו כי הוא מתאפס בכל x_i. ■

כעת, נניח בלי הגבלת הכלליות כי קטע האינגרציה הוא $[-1,1]$, כלומר נחפש כללים מהצורה

$$\int_{-1}^{1} g\left(t\right)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} w_i g\left(t_i\right)$$

מדוע?

$$\int_a^b f\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\right)\frac{b-a}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g\left(t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i g\left(t_i\right)$$

כעת, מעלת דיוק $2n-1$ פירושה שרוצים לפתור את

$$\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^j = \int_{-1}^{1} x^j$$

לכל $1\leq j\leq 2n-1$. אלה $2n$ משוואות עם $2n$ נעלמים (הנקודות והמשקלות).

משפט 1.2 לכל $n>1$ קיים כלל אינגרציה מהצורה $\sum w_i f\left(x_i\right)$ עבור $\int_{-1}^{1} f\left(x\right)\,\mathrm{d}x$ ממעלת דיוק $2n-1$. הנקודות $\{x_i\}$ הן השורשים של פולינום לז'נדר ממעלה n, והמשקולות הן

$$w_i = \int_{-1}^{1} \prod_{i\neq j} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,\mathrm{d}x$$

כלל אינטגרציה זה נקרא כלל אינטגרציית גאוס.

1.4.1 הפולינומים של לז'נדר

הפולינומים מוגדרים על ידי

$$p_n\left(x\right)=\frac{1}{2^nn!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)$$

נרצה לחשב את מעלת הפולינום. האיבר המוביל בביטוי הפנימי הוא x^{2n}, ואם נגזור אותו n פעמים נקבל אכן מעלה n.

למה 1.3 $p_n\left(x\right)$ אורתוגונליים בקטע $[-1,1]$, כלומר אם $m\neq n$ אזי

$$\int\limits_{-1}^{1}p_m\left(x\right)p_n\left(x\right)\,\mathrm{d}x=0$$