אנליזה נומרית 1

© ארזים

8 ביוני 2017

1 אינטגרציה נומרית

אפשר לפתור בעזרת השיטות שנראה אינטגרלים בלי פונקצייה קדומה (שימושי למשל בהסתברות), או לקרב פונקציה כשיש רק דגימות. נחפש קירובים מהצורה

$$\int_a^b f(x) = \sum_i \omega_i f(x_i)$$

נניח שהנקודות x_i נתונות ושוות מרחק. נמצא פולינום אינטרפולציה עבור f ונבצע אינטגרציה שלו. נבנה

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)$$

נקרב על ידי

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x}_{\omega_i}$$

מכאן נקבל

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) - p_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\,\mathrm{d}x$$

נוסחאות אינטגרציה שמבוססות על אינטרפולציית לגראנז' בנקודות שוות מרחק נקראות נוסחאות Newton-Cotes. אם קצות הקטע הם חלק מהנקודות הנוסחה נקראת סגורה, ואחרת היא נקראת פתוחה.

דוגמאות נתחיל באינטרצפולציה לינארית ונראה את כלל הטרפז. כותבים

$$p_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

נחשב את האינטגרל: זהו שטל של טרפז. נסמן $h=b-a$ ונקבל

$$\int_a^b f(x) \approx \int_a^b p_1(x) = (f(a)+f(b))\frac{h}{2}$$

למה 1.1 (משפט ערך הביניים האינטגרלי) נניח כי $f\in C[a,b]$, $g(x)>0$. אזי קיים נקודה $c\in[a,b]$ עם

$$\int_a^b f(x)\,g(x) = f(c)\int_a^b g(x)$$

הוכחה:

$$\min f\int_a^b g \le \int_a^b fg \le \max f\int_a^b g$$

ולכן המסקנה נובעת ממשפט ערך הביניים. ■

כעת נחשב את השגיאה בכלל הטרפז. ראינו כי

$$f(x)-p_1(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)$$

לכן מתקיים

$$f''(\xi_x) = 2\frac{f(x)-p_1(x)}{(x-a)(x-b)}$$

ולכן זו פונקציה רציפה. מכאן

$$\int_a^b f(x)-p_1(x) = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)$$

בפנים יש לנו פונקציה רציפה כפול פונקצייה שלילית תמיד. נוציא מינוס ונשתמש בערך הביניים האינטגרלי:

$$\int_a^b f(x)-p_1(x) = -\frac{f''\left(\tilde{\xi}\right)}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)$$

נכתוב כעת $s=x-a$, $h=b-a$ ונקבל

$$-\frac{f''\left(\tilde{\xi}\right)}{2}\int_0^h s(h-s)\,\mathrm{d}s = -\frac{f''\left(\tilde{\xi}\right)}{2}\left(\frac{hs^2}{2}-\frac{s^3}{3}\right)_0^h =$$

$$= -\frac{f''\left(\tilde{\xi}\right)}{2}\left(\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{3}\right) = -\frac{h^3}{12}f''\left(\tilde{\xi}\right)$$

קיבלנו כלל עם דיוק h^3. נשים לב שהוא מדוייק לחלוטין לכל פולינום קבוע או לינארי, אבל לפולינומים ממעלה 2 ומעלה כבר לא.

הגדרה 1.2 מעלת הדיוק של כלל אינטגרציה היא n אם כלל האינטגרציה מדוייק לכל הפולינומים ממעלה לכל היותר n, וקיים פולינום ממעלה $n+1$ שעבורו הכלל לא מדוייק.

משפט 1.3 נתונות $n+1$ נקודות בקטע $[a,b]$, $a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$. נתון כלל אינטגרציה עבור $\int_a^b f$ מהצורה

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i f\left(x_i\right)$$

עבור

$$\omega_i = \int\limits_a^b l_i\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

עבור

$$l_i = \prod_{j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

אזי הכלל מדוייק ממעלה לפחות n.

הוכחה: יהי p פולינום ממעלה n. מתקיים

$$p_n\left(x\right) \equiv \sum_{i=0}^{n} p_i\left(x\right) l_i\left(x\right)$$

בגלל יחידות פולינום האינטרפולציה. לכן

$$\int\limits_a^b p\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \sum_{i=0}^{n} p\left(x_i\right) l_i\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} p_i\left(x\right) \int\limits_a^b l_i\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i p\left(x_i\right)$$

ולכן סיימנו. ■

הערה 1.4 בכלל הטרפז ראינו שגיאה של $o\left(h^3\right)$, בעוד בגזירה ראינו שגיאה של $o\left(h\right)$. אינטגרציה זה קל יותר.