אנליזה נומרית

ארזים ©

19 במרץ 2017

1 נקודה צפה

בשיעור שעבר דיברנו בייצוג מספרים במחשב עזרת נקודה צפה. דיברנו על סטנדרט double precision, שבו יש 52 ביט של מנטיסה, ביט של סימן ועוד 11 ביט של אקספוננט. מספרים מיוחדים הם:

1. $\pm Inf$ - סימן $\pm$, מנטיסה $0\ldots0$, אקספוננט $1\ldots1$.
2. NaN - סימן כלשהו, מנטיסה שמתחילה בביט 1, אקספוננט $1\ldots1$.
3. ±0 - סימן $\pm$, מנטיסה $0\ldots0$, אקספוננט $0\ldots0$.

יש גם סטנדרט של single precision, שמשתמש בחצי מכמות הביטים - ביט לסימן, 23 ביט למנטיסה, 8 ביט לאקספוננט. זה שימושי כדי לחסוך במקום.

דוגמא מה המספר הקטן ביותר, הגדול מאחד, שנוכל לייצג בדיוק כפול?

$$\begin{aligned}1 &= 1.0\ldots00\cdot2^{0}\\ 1_{\varepsilon} &= 1.0\ldots01\cdot2^{0} = 1+2^{-52}\approx1+2\cdot10^{-16}\end{aligned}$$

לכן, לכל מספר $1<x<1_{\varepsilon}$ צריך לבחור אם מעגלים למטה או למעלה.

הגדרה 1.1 אם x מספר ממשי, נסמן בתור $\tilde{x}$ אם $fl\left(x\right)$ את ייצוג הנקודה הצפה של x.

הגדרה 1.2 שגיאת העיגול של x היא

$$fl\left(x\right)-x$$

הגדרה 1.3 דיוק מכונה (machine epsilon) מסומן ε_{M} והוא המרחק בין 1 למספר קטן ביותר הבא אחריו בדיוק כפול, כלומר 2^{-52}. אם מעגלים כל מספר למספר הקרוב אליו, שגיאת העיגול היא חצי מזה כלומר 2^{-53}.

בשפת $Matlab$, ε_{m} נתון על ידי הקבוע eps.

הגדרה 1.4 שגיאה מוחלטת:

$$|fl\left(x\right)-x|\leq2^{exp(x)}\cdot\varepsilon_{M}$$

הגדרה 1.5 שגיאה יחסית:

$$\frac{|fl\left(x\right)-x|}{|x|}\leq\frac{2^{exp(x)}\cdot\varepsilon_{M}}{|x|}\leq\varepsilon_{M}$$

דוגמא מה השגיאה בייצוג $10^{20}+300$ בדיוק כפול? המחשב מסוגל לייצג רק 16 ספרות לערך, ולכן נעבד את המספר 300 בסוף. אזי

$$fl\left(10^{20}+300\right)=10^{20}$$

ולכן השגיאה המוחלטת היא 300. השגיאה היחסית היא

$$\frac{300}{10^{20}+300}<2\cdot10^{-16}=\varepsilon_{M}$$

1.1 פעולות אריתמטיות בנקודה צפה

התכונה הבסיסית בתקן IEEE 754 היא שמתקיים

$$fl\left(x\right)=x\left(1+\varepsilon\right)$$

כאשר $|\varepsilon|\leq\varepsilon_{M}$. הפעולות $+,-,*,/$ שונות מהפעולות המתאימות בנקודה צפה. למשל $1+10^{-20}$ יהיה עדיין 1. נסמן את הפעולות בנקודה צפה בתור

$$\boxed{+},\boxed{-},\boxed{*},\boxed{/}$$

התקן מגדיר שלכל שני מספרים שניתנים לייצוג בנקודה צפה x,y מתקיים

$$x\boxed{op}y=fl\left(x\,op\,y\right)$$

משתי התכונות האחרונות נקבל כי

$$x\boxed{op}y=\left(x\,op\,y\right)\left(1+\varepsilon\right)$$

כאשר $|\varepsilon|<\varepsilon_{M}$.

1.1.1 איבוד ספרות

בחיבור מספרים בגודל דומה וסימנים הפוכים אפשר לאבד ספרות.

דוגמא נניח שניתן לעבוד עם 4 ספרות דיוק. ניקח

$$\begin{aligned} a &= 1.435234 \\ b &= 1.429111 \\ a-b &= 6.123 \cdot 10^{-3} \\ \tilde{a} &= 1.435 \\ \tilde{b} &= 1.429 \\ \tilde{a}-\tilde{b} &= 6.000 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

נחשב את השגיאה היחסית:

$$\left| \frac{\left(\tilde{a}-\tilde{b}\right)-(a-b)}{a-b} \right| = \frac{0.123 \cdot 10^{-3}}{6.123 \cdot 10^{-3}} \gg 10^{-3}$$

דוגמא נפתור את המשוואה

$$x^2 + 10^8 x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-10^8 \pm \sqrt{10^{16}-4}}{2}$$

נקבל

$$\tilde{x_1} = -10^8, \tilde{x_2} = -7.45 \cdot 10^{-5}$$

אם נשתמש ביותר ספרות נקבל

$$\begin{aligned} \tilde{x_1} &= -0.00\ldots010\ldots00 \cdot 10^7 \\ \tilde{x_2} &= -10^{-8} \end{aligned}$$

נחשב את השגיאות עבור $\tilde{x_2}$:

$$\begin{aligned} \tilde{x_2} - x_2 &= 2.55 \cdot 10^{-5} \\ \frac{|\tilde{x_2}-x_2|}{|x_2|} &\approx 0.25 \end{aligned}$$

ננסה לפתור את הבעיה:

$$\tilde{x_2} = \frac{-10^8+\sqrt{10^{16}-4}}{2}\cdot\frac{-10^8+\sqrt{10^{16}-4}}{-10^8+\sqrt{10^{16}-4}} = \frac{-4}{2\cdot\left(-10^8+\sqrt{10^{16}-4}\right)} \approx$$
$$\approx \frac{-4}{4\cdot 10^8} = -10^{-8}$$

במקרה הכללי נרצה לפתור את $ax^2+bx+c=0$ כאשר $b>0$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =\\
&= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{-b-\sqrt{b^2-4ac}} =\\
&= \frac{4ac}{-2a\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)} = -\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}
\end{aligned}$$

דוגמא נרצה לחשב את $1-\cos x$ כאשר $x=10^{-6}$. חישוב נאיבי נותר $5.000044\cdot 10^{-13}$, וזו שגיאה לא קטנה. נרצה לפתור טוב יותר - בעזרת טור טיילור.

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$$

לכן אנחנו נקרב:

$$1-\cos x = \frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}$$

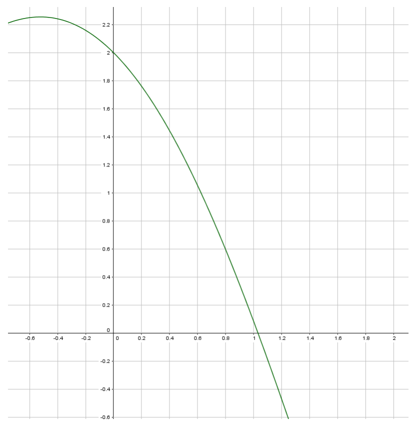
אין טעם לקחת עוד איבר - x^6 יהיה מסדר גודל כזה שההפרש בינו לבין מה שיש לנו כבר יהיה קטן יותר משניתן לייצג. בעזרת הטור נקבל

$$1-\cos 10^{-6} \approx 4.999\dots 9583\cdot 10^{-13} \approx 5\cdot 10^{-13}$$

ההבדל בין החישוב על ידי הטור לבין החישוב הנאיבי הוא בספרה הרביעית אחרי הנקודה, כלומר איבדנו 12 ספרות.

1.2 מציאת שורשים

נרצה לפתור את $f(x)=0$, כאשר f פונקציה כלשהי.



איור 1: הפונקציה $f\left(x\right)=2\cos x-x$

1.2.1 שיטת החצייה - bisection

נפתור את

$$f\left(x\right)=2\cos x-x=0$$

הפונקציה נראית כמו באיור 1. האפס מתקבל בנקודה 1.02517.

בכל שלב נשמור נקודות a,b כך שמתקיים $f\left(a\right)f\left(b\right)<0$. בכל פעם ניקח את נקודת האמצע $c=\frac{a+b}{2}$, ונחליף אותה בנקודה שאיתה היא חולקת סימן. האלגוריתם מוצג תחת "אלגוריתם 1".

משפט 1.6 תהי $f\in C\left[a,b\right]$, כך שמתקיים $f\left(a\right)f\left(b\right)<0$. נתבונן בערך x_n המיוצר על ידי האלגוריתם. אזי

$$\lim_{n\to\infty}x_n=r,f\left(r\right)=0$$

וכן

$$\left|x_n-r\right|\leq\frac{b-a}{2^n}$$

הוכחה: בגלל החצייה נקבל כי

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n-1}}$$

אלגוריתם 1 שיטת החצייה

set $a_1 \leftarrow a, b_1 \leftarrow b$
repeat

- set $x_i \leftarrow \frac{a_i+b_i}{2}$
- if "x_i root"
  - return x_i
- else if $f(x_i) f(a_i) < 0$
  - set $a_{i+1} \leftarrow a_i, b_{i+1} \leftarrow x_i$
- else set $a_{i+1} \leftarrow x_i, b_{i+1} \leftarrow b_i$

until $i > N$
return "Too many iterations"

לכן

$$[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

וכמו כן

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

ולכן מהלמה של קנטור,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{r\}$$

ברור שמתקיים $a_n, b_n \to r$, כי $a_n \le r \le b_n$ לכל n וההפרש שואף לאפס. לכן $x_n = \frac{a_n - b_n}{2}$ שמחושב על ידי האלגוריתם מתכנס לגבול $x_n \to r$.
נותר להראות כי r שורש, כלומר $f(r) = 0$. לפי משפט ערך הביניים, לכל $[a_n, b_n]$ קיים r_n בקטע המקיים $f(r_n) = 0$. נתבונן בסדרה $\{r_n\}$, שממשפט הסנדוויץ' מתכנסת לגבול r:

$$|r_n - r| \le |r_n - a_n| + |a_n - r| \le |b_n - a_n| + |a_n - r| \to 0$$

לכן,

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(r)$$

מרציפות. בבירור, מתקיים

$$|x_n - r| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n}$$

■