אנליזה נומרית 1

© ארזים

4 ביוני 2017

1 גזירה נומרית

נרצה לקרב את הנגזרת של f על ידי הנקודות $(x_i, f(x_i))$. הגדרת הנזגרת אומרת:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

נקרב את זה:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

ונרצה לבדוק את השגיאה בקירוב הזה, ואיך לבחור את h.

$$f(x_0+h) = f(x) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

כאשר $\xi \in [x_0, x_0+h]$. אם כן,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi)$$

סכימה זו נקראת Forward Difference, והשגיאה בה היא

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| \leq M\frac{h}{2}$$

שגיאה זו נקראת Truncation Error. יש גם את סכימת Backward Difference:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi)$$

והשגיאה היא שוב $o(h)$.

דוגמה ניקח $f(x) = \ln x$ ונחשב את $f'(2)$.

$$h = 0.1 \Rightarrow \frac{\ln 2.1 - \ln 2}{0.1} = 0.4879$$
$$h = 0.01 \Rightarrow \frac{\ln 2.01 - \ln 2}{0.01} = 0.498$$
$$h = 0.001 \Rightarrow \frac{\ln 2.001 - \ln 2}{0.01} == 0.499875$$

נחשב את השגיאה:

$$|E| = |f''(\xi)| \frac{h}{2} = \frac{1}{\xi^2} \frac{h}{2} \leq \frac{h}{8}$$

וקיבלנו שהחסם הזה די הדוק, לפי התוצאות. אפשר להקטין את E ולקבל דיוק אפילו יותר טוב.

נרצה להגדיל את הדיוק בלי להקטין את h יתר על המידה. ניקח את $f(x_0-h)\,, f(x_0+h)\,, f(x_0)$, ונרצה לכתוב

$$Af(x_0-h) + Bf(x_0) + Cf(x_0+h) = f'(x_0) + o\left(h^2\right)$$

כאשר A, B, C קבועים.

$$\begin{aligned}
f(x_0-h) &= f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1) \\
f(x_0) &= f(x_0) \\
f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''\left(x_)\right) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_2)
\end{aligned}$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned}
Af(x_0+h) + Bf(x_0) + Cf(x_0-h) = (A+B+C) f(x_0) + (C-A) hf'(x_0) + \\
+ (C+A) \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} \left(Cf'''(\xi_2) - Af'''(\xi_1)\right)
\end{aligned}$$

נקבל שלוש משוואות:

$$\begin{aligned}
A + B + C &= 0 \\
Ch - Ah &= 1 \\
C\frac{h^2}{2} + A\frac{h^2}{2} &= 0
\end{aligned}$$

הפתרון הוא $A = -\frac{1}{2h}, C = \frac{1}{2h}, B = 0$. כלומר:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{h^2}{12} \left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right)$$

כעת, נוכל לכתוב

$$\frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = f'''(\xi)$$

ממשפט ערך הביניים, ולכן

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

וסכימה זו נקראת Central Difference.

דוגמא נוכל לחזור לדוגמא הקודמת עם $f\left(x\right)=\ln x$. השגיאות שם עם FD,BD דומות, אבל עם CD היא קטנה משמעותית.

אפשר להכליל את השיטה, תוך שימוש בחמש נקודות, $f\left(x_{0}-2h\right),f\left(x_{0}-h\right),f\left(x_{0}\right),f\left(x_{0}+h\right),f\left(x_{0}+2h\right)$, נקבל

$$f'\left(x_{0}\right)=\frac{1}{12h}\left(f\left(x_{0}-2h\right)-8f\left(x_{0}-h\right)+8f\left(x_{0}+h\right)-f\left(x_{0}+2h\right)\right)+\frac{h^{4}}{30}f^{(5)}\left(\xi\right)$$

1.1 אקסטרפולציית ריצ'ארדסון

נרצה לשלב סכימות גזירה בעלות דיוק נמוך לקבלת סכמות גזירה בעלות דיוק גבוה.

דוגמה נגדיר

$$D\left(h\right)=\frac{f\left(x_{0}+h\right)-f\left(x_{0}-h\right)}{2h}$$

וראינו שמתקיים

$$D\left(h\right)=f'\left(x_{0}\right)+o\left(h^{2}\right)$$

נוכל לכתוב

$$f\left(x_{0}+h\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(x_{0}\right)}{n!}h^{n}$$
$$f\left(x_{0}-h\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(x_{0}\right)}{n!}h^{n}\left(-1\right)^{n}$$

ולכן

$$D\left(h\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}h^{2n}$$

כאשר למשל $c_{0}=f'\left(x_{0}\right)$. כעת,

$$D\left(2h\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}4^{n}h^{n}$$

ולכן

$$4D\left(h\right)-D\left(2h\right)=3f'\left(x_{0}\right)-12c_{2}h^{4}\pm\ldots$$

כלומר

$$\frac{4D\left(h\right)-D\left(2h\right)}{3}=f'\left(x_{0}\right)+o\left(h^{4}\right)$$

נפתח את הביטוי:

$$\begin{aligned}\frac{4D\left(h\right)-D\left(2h\right)}{3} &= \frac{1}{3}\left(8\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)}{4h}-\frac{f\left(x_0+2h\right)-f\left(x_0-2h\right)}{4h}\right)+o\left(h^4\right)= \\ &= \frac{1}{12h}\left(f\left(x_0-2h\right)-8f\left(x_0-h\right)+8f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0+2h\right)\right)+o\left(h^4\right)\end{aligned}$$

וזה בדיוק מה שקיבלנו קודם.

כעת, נתונה פונקציה F וביטוי שמקרב אותה $T\left(h\right)$. נניח שניתן לכתוב את שגיאת הקירוב בטור חזקות:

$$F-T\left(h\right)=c_1h+c_2h^2+\ldots$$

במקרה זה, $F-T\left(h\right)=o\left(h\right)$. כעת שוב

$$2T\left(h\right)-T\left(2h\right)=F+2c_2h^2+\ldots$$

1.1.1 שגיאות עיגול

בסכימת הפרש מרכזי קיבלנו

$$f'\left(x_0\right)=\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)}{2h}+\frac{h^3}{6}f'''\left(\xi\right)$$

בגלל שגיאות עיגול נקבל

$$\frac{\tilde{f}\left(x_0+h\right)-\tilde{f}\left(x_0-h\right)}{2h}$$

וכן $e=\frac{\tilde{f}-f}{f}$, עבור $e=o\left(\varepsilon_M\right)$. נכתוב

$$\tilde{f}\left(x_0\pm h\right)=f\left(x_0\pm h\right)\left(1+e\left(x_0\pm h\right)\right)$$

כעת נכתוב

$$\begin{aligned}\left|E\left(h\right)\right| = \left|\frac{\tilde{f}\left(x_0+h\right)-\tilde{f}\left(x_0-h\right)}{2h}-f'\left(x_0\right)\right| &= \left|\frac{f\left(x_0+h\right)\left(1+e\left(x_0+h\right)\right)-f\left(x_0-h\right)\left(1+e\left(x_0-h\right)\right)}{2h}-f'\left(x\right.\right. \\ &= \left|\frac{f\left(x_0+h\right)e\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)e\left(x_0-h\right)}{2h}-\frac{h^2}{6}f'''\left(\xi\right)\right|\leq \\ &\leq \left|\frac{f\left(x_0+h\right)e\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)e\left(x_0-h\right)}{2h}\right|+\left|\frac{h^2}{6}f'''\left(\xi\right)\right|\leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{h}M_0+\frac{h^2}{6}M_3\end{aligned}$$

עבור

$$M_i=\max_{x\in\left[x_0-h,x_0+h\right]}\left|f^{(i)}\left(x\right)\right|$$

קיבלנו חסם על השגיאה. נרצה למצוא לו מינימום לפי h:

$$\begin{aligned} E'\left(h\right) &= -\frac{\varepsilon M_0}{h^2} + \frac{h}{3}M_3 = 0 \\ \frac{h}{3}M_3 &= \frac{\varepsilon}{h^2}M_0 \\ h^3 &= \frac{3\varepsilon M_0}{M_3} \end{aligned}$$

וברור שנקודה זו היא מינימום ־ אין נקודת מקסימום (המקסימום אינסופי). הביטוי הזה נותן לנו את סדר הגודל של h. אנחנו צריכים $h \approx \sqrt[3]{\varepsilon}$. אם $\varepsilon = 10^{-16}$, נצטרך $h \approx 10^{-6}$.
נסמן את אותו h אופטימלי בתור h_{opt} ונחשב:

$$E\left(h_{opt}\right) = \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon M_0}{M_3}}} + + \frac{\left(\frac{3\varepsilon M_0}{M_3}\right)^{\frac{2}{3}}}{6}M_3 \approx \varepsilon^{\frac{2}{3}}$$

ולכן השגיאה הטובה ביותר לה נצפה היא בערך 10^{-10}.

1.2 שימוש בגזירה נומרית

נפתור את $u''\left(x\right) = g\left(x\right)$, כאשר $u\left(0\right) = A$, $u\left(1\right) = B$. נגדיר נקודות רשת: $h = \frac{1}{n}, x_j = jh$. נוסחת הקירוב נותנת לנו

$$u''\left(x\right) = \frac{u\left(x+h\right) - 2u\left(x\right) + u\left(x-h\right)}{h^2} + o\left(h^2\right)$$

נסמן $u_j = u\left(x_j\right)$. נדרוש

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = g\left(x_j\right)$$

בתוך הקטע $[0,1]$. קיבלנו מערכת משוואות, תלת אלכסונית ־ לכן אפשר לפתור אותה תוך $O\left(n\right)$ פעולות.