אנליזה נומרית 1

ⓒ ארזים

1 ביוני 2017

1 פולינומי צ'בישב

ראינו בשיעור הקודם כי

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|f\left(x\right)-p_{n}\left(x\right)\right|\leq\frac{\max_{x\in[-1,1]}\left|f^{(n+1)}\left(x\right)\right|}{(n+1)!}2^{-n}$$

זה חסם על שגיאת האינטגרפוציה בקטע $[-1,1]$ בנקודות צ'בישב. בקטע $[a,b]$ כללי נבחר את נקודות האינטגרפולציה להיות

$$z_{k}=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x_{k}$$

כאשר x_k נקודות צ'בישב. אם כן, נקבל

$$\begin{aligned}\max_{x\in[a,b]}\left|f\left(x\right)-p_{n}\left(x\right)\right| & \leq\frac{\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}\left(x\right)\right|}{(n+1)!}\max_{z\in[a,b]}\left|\prod_{k=0}^{n}\left(z-z_{k}\right)\right|=\\
 & =\frac{\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}\left(x\right)\right|}{(n+1)!}\max_{x\in[-1,1]}\left|\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x-\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}x_{k}\right)\right|=\\
 & =\frac{\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}\left(x\right)\right|}{(n+1)!}\max_{x\in[-1,1]}\left|\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{b-a}{2}\left(x-x_{k}\right)\right)\right|=\\
 & =\frac{\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}\left(x\right)\right|}{(n+1)!}2^{-n}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

דוגמה נקרב את $f\left(x\right)=\sin\left(x\right)$ בקטע $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ על ידי פולינום ממעלה 11. נשתמש בשורשים של $T_{12}\left(x\right)$ מועתקים לקטע $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. אז השגיאה היא לכל היותר

$$\frac{\max_{x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]}\left|f^{12}\left(x\right)\right|}{12!}2^{-11}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)^{12}\approx5.6\cdot10^{-14}$$

כעת, נמצא את הקירוב הטוב ביותר של x^n על ידי פולינום ממעלה $n-1$ לכל היותר בקטע $[-1,1]$. ראינו כי

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|x^n-\underbrace{\left(a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x-a_0\right)}_{q_{n-1}(x)}\right|\geq\max_{x\in[-1,1]}\left|2^{-n+1}T_n\left(x\right)\right|=2^{-n+1}$$

נקבל שוויון כאשר $x^n-q_{n-1}\left(x\right)=2^{-n+1}T_n\left(x\right)$ כלומר

$$q_{n-1}\left(x\right)=x^n-2^{-n+1}T_n\left(x\right)$$

ואז מתקיים

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|x^n-q_{n-1}\left(x\right)\right|=2^{-n+1}$$

כלומר x^n כמעט נפרש על ידי $x^{n-1},\ldots,x,1$. צריך בסיס אחר, טוב יותר ־ נראה בהמשך.
נסמן $p_n\left(x\right)$ את פולינום האינטרפולציה של $f\left(x\right)$ ממעלה n בנקודות הנתונות על ידי השורשים של $T_{n+1}\left(x\right)$. נסמן $p_n^*\left(x\right)$ את פולינום המינימקס המוגדר על ידי

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|f\left(x\right)-p_n^*\left(x\right)\right|\leq\max_{x\in[-1,1]}\left|f\left(x\right)-Q_n\left(x\right)\right|$$

לכל פולינום Q_n ממעלה לכל היותר n. נגדיר כעת

$$e_n^*\left(x\right)=p_n^*\left(x\right)-f\left(x\right),e_n\left(x\right)=p_n\left(x\right)-f\left(x\right)$$

וכן

$$h_n^*=\max_{x\in[-1,1]}\left|e_n^*\left(x\right)\right|,h_n=\max_{x\in[-1,1]}\left|e_n\left(x\right)\right|$$

ברור שמתקיים $h_n^*\leq h_n$.

משפט 1.1

$$\frac{h_n}{h_n^*}\leq1+\max_{x\in[-1,1]}\sum_{j=0}^{n}\left|l_j\left(x\right)\right|$$

כאשר $l_j\left(x\right)$ הוא הפולינום ממעלה n שקיימים $l_i\left(x_j\right)=\delta_{i,j}$ עבור $i,j=0,\ldots,n$, x_j הן נקודות האינטרפולציה עבור הפולינום $p_n\left(x\right)$.

הוכחה:

$$e_n^*-e_n=p_n^*-f-\left(p_n-f\right)=p_n^*-p_n$$

ולכן $e_n^*-e_n$ פולינום ממעלה לכל היותר n שמקיים $e_n^*\left(x_j\right)-e_n\left(x_j\right)=e_n^*\left(x_j\right)$ ולכן נקבל

$$e_n^*\left(x\right)-e_n\left(x\right)=\sum_{j=0}^{n}e_n^*\left(x_j\right)l_j\left(x\right)$$

ואז

$$|e_n(x)| = \left| e_n^*(x) - \sum_{j=0}^{n} e_n^*(x_j)\, l_j(x) \right| \le |e_n^*(x)| + \sum_{j=0}^{n} |e_n^*(x_j)|\, |l_j(x)| \le$$
$$\le h_n^* + h_n^* \sum_{j=0}^{n} |l_j(x)|$$

ניקח מקסימום על שני האגפים ונסיים

$$h_n \le h_n^* \underbrace{\left(1 + \max_{x\in[-1,1]} \sum_{j=0}^{n} |l_j(x)|\right)}_{v_n}$$

■

מסתבר שעבור נקודות צ'בישב, לערך v_n יש ביטוי סגור: הנקודות הן

$$x_j = \cos\left(\frac{2j-1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right)$$

כאשר $j = 1, \ldots, n+1$ (שורשי $T_{n+1}(x)$). נקבל

$$v_n = 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \tan\left(\frac{\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi}{2(n+1)}\right)$$

משפט 1.2 תהי f פונקציה בקטע $[-1,1]$. אזי השגיאה המתקבלת על ידי קירוב צ'בישב מסדר n (פונקצית האינטרפולציה בשורשים של $T_{n+1}(x)$ קטנה מאשר $4h_n^*$ עבור $n \le 20$, וקטנה מאשר $5h_n^*$ עבור $n \le 100$. עבור n גדול, מתקיים

$$v_n \sim \frac{2}{\pi} \ln n$$