אנליזה נומרית 1

ארזים ©

28 במאי 2017

1 אינטרפולצייה בצורת ניוטון

נרצה לכתוב

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + q_n(x)$$

קיבלנו שמתקיים

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(a_j \prod_{k=0}^{j} (x - x_k) \right)$$

וסימנו

$$a_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_j]$$

משפט 1.1

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0) \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ f[x_0, x_1, \ldots, x_k] &= \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \end{aligned}$$

הוכחה: באינדוקציה על k. עבור $k = 0, 1$ ראינו, ולכן נבצע את הצעד. נסמן p_{k-1} את פולינום האינטרפולציה בנקודות $x_0, \ldots, x_{k-1}$, וכן q_{k-1} את פולינום האינטרפולציה עבור $x_1, \ldots, x_k$. אזי

$$p_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} q_{k-1}(x) + \frac{x_k - x}{x_k - x_0} p_{k-1}(x)$$

נבדוק שמתקיים $p_k(x_i)=f(x_i)$ עבור $i=0,\dots,k$:

$$\begin{aligned} p_k(x_0) &= p_{k-1}(x_0)=f(x_0) \\ p_k(x_k) &= q_{k-1}(x_k)=f(x_k) \\ p_k(x_i) &= \frac{x_i-x_0}{x_k-x_0}f(x_i)+\frac{x_k-x_i}{x_k-x_0}f(x_i)= \\ &= \frac{x_k-x_0}{x_k-x_0}f(x_i)=f(x_i) \end{aligned}$$

הנחת האינדוקציה אומרת שהמקדם של x^{k-1} בתוך p_{k-1} הוא $f[x_0,\dots,x_{k-1}]$ ובתוך q_{k-1} הוא $f[x_1,\dots,x_k]$, ולכן נקבל שהמקדם של x^k בתוך p^k הוא

$$\frac{f[x_1,\dots,x_k]-f[x_0,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

■

כאשר מחשבים באמת, מחשבים ראשית את ההפרשים בנקודה אחת, ואז בשתיים, וכן הלאה.

"אה, לא אמרתי - המקדם $f[x_0,\dots,x_k]$ נקרא הפרש מחולק מסדר k. למה הפרש מחולק? כי הוא הפרש, והוא מחולק" - המרצה.

1.1 פולינומי צ'בישב

פלינום צ'בישב ממעלה n נתון על ידי

$$T_n(x)=\cos(n\arccos(x))$$

עבור $x\in[-1,1]$.

משפט 1.2 $T_n(x)$ הוא פולינום ממעלה n וכן

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \end{aligned}$$

הוכחה: אנחנו נוכיח

$$\cos((n+1)\phi)+\cos((n-1)\phi)=2\cos(\phi)\cos(n\phi)$$

"בתיכון בטח הוכחתם את זה כתרגיל נוראי באינדוקציה. אנחנו נפתור בצורה יפה יותר. מכירים מספרים מרוכבים?" - המרצה

ניזכר כי

$$\cos\left(x\right)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

ונקבל

$$\begin{aligned}\cos\left(\left(n+1\right)\phi\right)+\cos\left(\left(n-1\right)\phi\right)&=\frac{1}{2}\left(e^{i(n+1)\phi}+e^{-i(n+1)\phi}+e^{i(n-1)\phi}+e^{-i(n-1)\phi}\right)=\\&=\frac{1}{2}\left(e^{in\phi}\left(e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right)+e^{-in\phi}\left(e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right)\right)=\\&=\frac{1}{2}\left(e^{in\phi}+e^{-in\phi}\right)\left(e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right)=\\&=2\cos\left(n\phi\right)\cos\left(\phi\right)\end{aligned}$$

כעת ניקח $\phi=\arccos\left(x\right)$ ונקבל

$$\begin{aligned}T_{n+1}\left(x\right)=\cos\left(\left(n+1\right)\phi\right)&=2\underbrace{\cos\left(n\phi\right)}_{T_n(x)}\underbrace{\cos\phi}_{x}-\underbrace{\cos\left(\left(n-1\right)\phi\right)}_{T_{n-1}(x)}=\\&=2xT_n\left(x\right)-T_{n-1}\left(x\right)\end{aligned}$$

ולכן נקבל את שרצינו. ■

תכונות

1. $\left|T_n\left(x\right)\right|\le1$ לכל $x\in\left[-1,1\right]$.
2. מנוסחת הרקורסיה נקבל

$$T_n\left(x\right)=2^{n-1}x^n+\dots$$

3. נחפש נקודות קיצון:

$$T_n\left(x\right)=\pm1\iff n\phi=k\pi$$

עבור $\phi=\arccos\left(x\right)$. זה שקול לכך שמתקיים $\arccos\left(x\right)=\frac{k\pi}{n}$, כלומר

$$x=\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

עבור $k=0,1,\dots,n$. לכן יש $n+1$ נקודות קיצון.

4. בין כל שתי נקודות קיצון יש שורש, ולכן יש לפחות n שורשים. זהו פולינום ממעלה n ולכן אלה כל השורשים. נחשב אותם:

$$\begin{aligned}T_n\left(x\right)=0\iff\cos\left(n\phi\right)=0\iff n\phi=\frac{\pi}{2}\left(2k-1\right)\iff\\\iff\arccos\left(x\right)=\phi=\frac{2k-1}{n}\frac{\pi}{2}\iff\\\iff x_k=\cos\left(\frac{2k-1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

עבור $k=1,\dots,n$.

5. נקבל

$$2^{-n}T_{n+1}\left(x\right)=\prod_{k=0}^{n}\left(x-x_k\right)$$

כאשר $x_0,\ldots,x_n$ השורשים של T_{n+1}.

משפט 1.3 מבין כל הפולינומים $p_n\left(x\right)$, עבור $n\geq 1$ המעלה, שבהם המקדם של x^n הוא 1, לפולינום $f^n\left(x\right)=2^{-(n-1)}T_n\left(x\right)$ יש את הערך המוחלט המקסימלי הקטן ביותר בקטע $[-1,1]$. כלומר

$$\min_{p_n|a_n=1}\left\{\max_{x\in[-1,1]}p_n\left(x\right)\right\}=\max_{x\in[-1,1]}\left|f^n\left(x\right)\right|=2^{-(n-1)}$$

הוכחה: ראינו שהפולינום $f^n\left(x\right)$ מקבל את ערכי הקיצון $\pm 2^{-(n-1)}$ באותן $n+1$ נקודות של x_k בקטע $[-1,1]$. נניח בשלילה שקיים פולינום p_n עם מקדם עליון $a_n=1$ כך שמתקיים $\left|p_n\left(x\right)\right|<2^{-(n-1)}$ לכל x בקטע. אזי

$$p_n\left(x_0\right)<2^{-(n-1)}T_n\left(x_0\right)=\frac{1}{2^{n-1}}$$
$$p_n\left(x_1\right)>2^{-(n-1)}T_n\left(x_1\right)=-\frac{1}{2^{n-1}}$$
$$p_n\left(x_2\right)<2^{-(n-1)}T_n\left(x_2\right)=\frac{1}{2^{n-1}}$$

וכן הלאה. נגדיר כעת

$$Q\left(x\right)=p_n\left(x\right)-2^{-(n-1)}T_n\left(x\right)$$

מתקיים

$$Q\left(x_0\right)<0,Q\left(x_1\right)>0,Q\left(x_2\right)<0$$

ולכן Q מחליף סימן $n+1$ פעמים בקטע $[-1,1]$, ולכן יש לו לפחות n שורשים. אבל Q פולינום ממעלה $n-1$, כי ביטלנו את המקדם העליון. לכן $Q=0$. ■

מכאן נקבל שאם נשתמש בשורשי $T_n\left(x\right)$ כנקודות לאינטרפולציה נקבל

$$\max_{[-1,1]}\left|f\left(x\right)-p_n\left(x\right)\right|=\frac{2^{-n}}{n+1}\max_{[-1,1]}\left|f^{(n+1)}\left(x\right)\right|$$