אנליזה נומרית 1

© ארזים

21 במאי 2017

1 אינטרפולציה

נתונות לנו n זוגות של נקודות (x_i, y_i), כאשר $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. איך נעריך את $f(x)$, עבור f כלשהי?
אנחנו מניחים $x \in [x_1, x_n]$.

משפט 1.1 (משפט ווירשטראס, לא נוכיח) תהי $f \in C[a,b]$, ויהי $\varepsilon > 0$. קיים פולינום $p(x)$ כך שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

משפט 1.2 נתונות $n+1$ נקודות שונות $x_0, \ldots, x_n$, ונתונים הערכים $y_i = f(x_i)$. אזי קיים פולינום יחיד ממעלה לכל היותר n המקיים $p_n(x_i) = y_i$ לכל $0 \le i \le n$.

הוכחה: לשם ההוכחה נעזר בלמה.

למה 1.3 נתונים שני פולינום p_n, q_n ממעלה n בעלי אותו מקדם מוביל, המקיימים $p_n(x_i) = q_n(x_i)$, לכל $0 \le i \le n-1$. אזי $p_n(x) = q_n(x)$.

הוכחה: הפולינום $p_n - q_n$ הוא פולינום ממעלה לכל היותר $n-1$, אבל יש לו n שורשים - $x_0, \ldots, x_{n-1}$. לכן $p_n(x) = q_n(x)$. ■

כעת, נסמן

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$$

אנו דורשים שיתקיים $p_n(x_i) = y_i$, משמע, בכתיב מטריציוני:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

המטריצה הזו נקראת מטריצת ונדרמונדה, ונסמנה $V(x_0, \ldots, x_n)$. נראה שמתקיים

$$\det V(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{k<j} (x_j - x_k)$$

נתון שהנקודות x_i שונות, ולכן נקבל שהדטרמיננטה הזו לא מתאפסת, ולכן המטריצה הפיכה וקיים פתרון יחיד.

נראה את הנוסחה שרצינו באינדקוקציה. עבור $n=1$ זה ברור:

$$\det V\left(x_0,x_1\right)=\begin{vmatrix}1 & x_0\\ 1 & x_1\end{vmatrix}=x_1-x_0$$

נמשיך באינדוקציה. נחשב את $\det V\left(x_0,\dots,x_{n-1},x\right)$. נפתח לפי השורה האחרונה ונקבל

$$\det V\left(x_0,\dots,x_{n-1},x\right)=\left(-1\right)^{2n+2}x^n\det V\left(x_0,\dots,x_{n-1}\right)+q\left(x\right)$$

כאשר q פולינום ממעלה קטנה ממש מאשר n. הביטוי האחרון שקיבלנו הוא פולינום שמתאפס בנקודות $x_0,\dots,x_{n-1}$, ולכן הוא מזדהה עם הפולינום

$$\det V\left(x_0,\dots,x_{n-1}\right)\left(x-x_0\right)\cdots\left(x-x_{n1}\right)$$

נשתמש בהנחת האינדוקציה ונקבל

$$\prod_{k<j}\left(x_j-x_k\right)\cdot\prod_{i=0}^{n-1}\left(x-x_i\right)$$

נשאר רק להציב $x_n=x$, ולסיים. ■

1.1 אינטרפולציית לגראנז'

נבנה פולינום שעובר דרך הנקודות $\left(x_i,y_i\right)$, בלי לפתור מערכת משוואות. נגדיר

$$L_k\left(x\right)=\prod_{k\neq i=0}^{n}\left(x-x_i\right)$$

הפולינום הזה מתאפס בנקודות x_i למעט בנקודה x_k, והוא ממעלה n. נגדיר

$$l_k\left(x\right)=\frac{L_k\left(x\right)}{L_k\left(x_k\right)}=\frac{\prod\limits_{k\neq i=1}^{n}\left(x-x_i\right)}{\prod\limits_{k\neq i=1}^{n}\left(x_k-x_i\right)}$$

פולינום זה מקיים $l_k\left(x_k\right)=1$, ולכל $j\neq k$ הוא מקיים $l_k\left(x_j\right)=0$. נגדיר לבסוף

$$p_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}y_kl_k\left(x\right)$$

וברור שבמצב זה מתקבל $p\left(x_i\right)=y_i$. פולינום זה הוא פולינום האינטרפולציה בצורת לגראנז'.

דוגמאות

1. עבור $n=0$, נתון (x_0,y_0), וכמובן $p_0(x)=y_0$.
2. עבור $n=1$, נתונים $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$, ואז מקבלים את משוואת הישר

$$p_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

3. אם נניח כי $y_0=y_1$ בדוגמא הקודמת נקבל

$$p_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_0\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=y_0\left(\frac{x-x_1-x+x_0}{x_0-x_1}\right)=y_0$$

4. נתונה טבלה של ערכי e^x עבור $x=0,0.1,0.2,\ldots,1$. נקרב את $e^{0.37}=1.44773$. עבור $n=0$, נקרב על ידי

$$p_0(x)=e^{0.4}$$

השגיאה היא $E_0=0.044$. עבור $n=1$, נשתמש בשתי הנקודות הקרובות ביותר:

$$p_1(x)=e^{0.3}\frac{x-0.4}{0.3-0.4}+e^{0.4}\frac{x-0.3}{0.4-0.3}$$
$$p_1(0.37)=1.44923$$

והשגיאה היא $E_1=1.5\cdot10^{-3}$. האחרון שנראה יהיה עבור $n=2$. ניקח את $0.3,0.4,0.5$:

$$p_2(x)=e^{0.3}\frac{(x-0.4)(x-0.5)}{(0.3-0.4)(0.3-0.5)}+e^{0.4}\frac{(x-0.3)(x-0.5)}{(0.4-0.3)(0.5-0.4)}+e^{0.5}\frac{(x-0.3)(x-0.4)}{(0.5-0.3)(0.5-0.4)}$$
$$p_2(0.37)=1.44767$$

והשגיאה היא $E_2=-6.74\cdot10^{-5}$.

משפט 1.4 יהיו $x_0,\ldots,x_n$ נקודות שונות בקטע $[a,b]$. תהי $f\in C^{n+1}[a,b]$ ויהי $p_n(x)$ פולינום אינטרפולציה ממעלה לכל היותר n. אזי לכל $x\in[a,b]$ קיימת נקודה $\xi(x)$ המקיימת

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

הוכחה: ניקח $\tilde{x}\in[a,b]$. אם $\tilde{x}=x_k$, עבור k כלשהו, נסיים (המשוואה תתקיים לכל בחירה של ξ). נניח כי $\tilde{x}\neq x_k$ לכל k. נסמן

$$h(x)=f(x)-p_n(x)-(f(\tilde{x})-p_n(\tilde{x}))\frac{\prod_{k\neq i=1}^{n}(x-x_i)}{\prod_{k\neq i=1}^{n}(\tilde{x}-x_i)}$$

נשים לב שפולינום זה מתאפס בנקודות $x_0,\dots,x_n$ וכן בנקודה $\tilde{x}$, כלומר $n+2$ נקודות. ממשפט רול, קיימת נקודה $\xi(\tilde{x})$ המקיימת $h^{(n+1)}(\xi(\tilde{x}))=0$. נגזור ונקבל

$$h^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-(f(\tilde{x})-p_n(\tilde{x}))\frac{(n+1)!}{\prod\limits_{k\neq i=1}^{n}(\tilde{x}-x_i)}$$

כעת, על ידי הצבת ξ והעברת אגפים נקבל

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

■

מסקנה 1.5 קיבלנו חסם נקודתי

$$|f(x)-p_n(x)|\leq\frac{\max\limits_{a\leq x\leq b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}\left|\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\right|$$

וחסם גלובלי

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)-p_n(x)|\leq\frac{\max\limits_{a\leq x\leq b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}\max_{a\leq x\leq b}\left|\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\right|$$

עובדה שלא נוכיח ־ אינטרפולציה בנקודות שוות מרחק אינה יציבה 0 טעויות קטנות בערכים $f(x_i)$ יובילו לטעויות גדולות בפולינום האינטרפולציה. ייתכן אפילו כי

$$\lim_{n\to\infty}|f(x)-p_n(x)|=\infty$$

למשל עבור $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

דוגמא אינטרפולצייה לינארית למקוטעים בנקודות שוות מרחקץ נניח שנתונות נקודות $x_0=a,x_n=b$, $x_{k+1}-x_k=h$. נסמן $p_1(x)$ את פולינום האינטרפולציה הלינארי למקוטעין (כלומר בין כל שתי נקודות סמוכות מעבירים קו ישר). אזי

$$|f(x)-p_1(x)|\leq\frac{\max\limits_{a\leq x\leq b}f''(x)}{2}|x-x_k||x-x_{k-1}|$$

נמצא קיצון לפונקציה $r(x)=(x-x_k)(x-x_{k-1})$. נגזור:

$$r(x)=x^2-(x_k+x_{k-1})x+x_kx_{k-1}$$
$$r'(x)=2x-(x_k+x_{k-1})$$

נקבל שנקודת הקיצון היא באמצע הקטע, $\frac{x_k+x_{k-1}}{2}$, שהיא גם $x_{k-1}+\frac{h}{2}$. נציב:

$$|r(x)| = \left|x_{k-1}+\frac{h}{2}-x_k\right|\left|x_{k-1}+\frac{h}{2}-x_{k-1}\right| = \frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2} = \frac{h^2}{4}$$

כלומר נקבל

$$\max_{a\leq x\leq b} \leq \max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|\frac{h^2}{8}$$

אם $n\to\infty$ נקבל $h\to 0$, ואז, אם הנגזרת השנייה חסומה (קטנה) נקבל שאיפה לאפס בקצב של h^2.

1.2 אינטרפולציית ניוטון

נרצה להציג את פולינום האינטרפולציה כל שיהיה קל להוסיף נקודה חדשה. נכתוב

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + q_n(x)$$

כאשר $p_n(x)$ פולינום האינטרפולציה עבור $x_0,\dots x_n$. $q_n(x)$ הוא פולינום ממעלה לכל היותר n, ואותו נרצה למצוא. נשים לב שלכל $1\leq i\leq n-1$ נקבל

$$q_n(x) = p_n(x_i) - p_{n-1}(x_i) = 0$$

ועל כן הוא מזדהה עם הפולינום

$$q_n(x) = a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

קיבלנו שמתקיים

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= p_{n-1}(x) + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\\
p_{n-1}(x) &= p_{n-2}(x) + a_{n-1}(x-x_0)\cdots(x-x_{n-2})\\
&\vdots\\
p_1(x) &= p_0(x) + a_1(x-x_0)\\
p_0(x) &= a_0
\end{aligned}$$

לכן נקבל

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n}\left(a_j\prod_{k=0}^{j-1}(x-x_k)\right)$$

נמצא נוסחה עבור a_j. מסמנים

$$a_j = f[x_0,\dots,x_j]$$

עבור $n=0$, מתקיים

$$p_0(x) = f(x_0) = a_0$$

עבור $n=1$, נתונים $f\left(x_{0}\right), f\left(x_{1}\right)$, ואז

$$\begin{aligned} p_{1}(x) &= f\left(x_{0}\right)+a_{1}\left(x-x_{0}\right) \\ p\left(x_{1}\right) &= f\left(x_{1}\right)=f\left(x_{0}\right)+a_{1}\left(x_{1}-x_{0}\right) \\ a_{1} &= \frac{f\left(x_{1}\right)-f\left(x_{0}\right)}{x_{1}-x_{0}}=f\left[x_{0}, x_{1}\right] \end{aligned}$$

משפט 1.6 לכל n מתקיים

$$f\left[x_{0}, \ldots, x_{k}\right]=\frac{f\left[x_{1}, \ldots, x_{k}\right]-f\left[x_{0}, \ldots, x_{k-1}\right]}{x_{k}-x_{0}}$$