# אנליזה נומרית 1

© ארזים

18 במאי 2017

## 1 פירוק SVD

לכל מטריצה $A$ מסדר $m \times n$ קיים פירוק מהצורה $A = U\Sigma V^T$ כאשר $U, V$ אורתוגונליות, $\Sigma$ אלכסונית.

נרצה לדון בקשר בין ערכים סינגולריים לערכים עצמיים.

**למה 1.1** הערכים הסינגולריים של $A$ הם השורשים של הערכים העצמיים של $A^TA$ ושל $AA^T$.

**הוכחה:** אם $A = U\Sigma V^T$ אזי

$$AA^T = U\Sigma V^T \left(U\Sigma V^T\right)^T = U\Sigma V^T V\Sigma^T U^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$$

■

### 1.1 תכונות קירוב של $SVD$

**למה 1.2** נסמן $r$ את הדרגה של המטריצה, $u_i$ את עמודות $U$, $v_i$ את עמודות $V$, $\sigma_i$ את הערכים הסינגולריים (אלכסון $\Sigma$). אזי

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$$

**משפט 1.3** נסמן

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$$

אזי

$$\min_{B \in M_{m,n}(\mathbb{R}), \mathrm{rk}(B) \leq k} ||A - B||_2 = ||A - A_k||_2 = \sigma_{k+1}$$

**הוכחה:**

$$A-A_k=\sum_{i=k+1}^{r}\sigma_i u_i v_i^T$$

ולכן $||A-A_k||_2=\sigma_{k+1}$.

תהי $B$ מטריצה עם $\mathrm{rk}\,(B)=k$. לכן יש לה גרעים ממימד $n-k$. נכתוב $\mathrm{null}\,(B)=\mathrm{span}\,\{w_1,\ldots,w_{n-k}\}$. משיקולי מימד,

$$\mathrm{span}\,\{w_1,\ldots,w_{n-k}\}\cap\mathrm{span}\,\{v_1,\ldots,v_{k+1}\}\neq\emptyset$$

לכן יהי וקטור יחידה $w$ מהחיתוך. אזי

$$w=\sum_{i=1}^{k+1}\left(v_j^T w\right)v_j$$
$$Aw=\sum_{j=1}^{k+1}\left(v_j^T w\right)\sigma_j u_j$$

על כן נקבל

$$||A-B||_2^2\geq||(A-B)\,w||_2^2=||Aw||_2^2=\sum_{j=1}^{k+1}\left(v_j^T w\right)^2\sigma_j^2=\sigma_{k+1}^2\sum_{j=1}^{k+1}\left(v_j^T w\right)=\sigma_{k+1}^2$$

וסיימנו. ■

ייצוג חסכוני של $SVD$ הוא, כאשר $A$ מסדר $m\times n$ כאשר $m\geq n$, אזי נוכל לקחת $U_1=[u_1,\ldots,u_n]\,,\Sigma_1=\mathrm{diag}\,(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, ואז

$$A=U_1\Sigma_1 V$$

## 1.2 יישומים של $SVD$

1. טווח, גרעין, דרגה (דרגה נומרית).
2. קירוב מטריצות.
3. הפיכת מטריצה:

$$A=U\Sigma V^T$$
$$A^{-1}=V\Sigma^{-1}U^T$$

4. פתרון של $\min ||Ax-b||_2$.

**האלגוריתם** נתונה המטריצה $A$ בגודל $m \times n$. נבנה את המטריצה $B = \begin{pmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$. $B$ סימטרית בגודל $(m+n) \times (m+n)$. תהי $Q$ המטריצה המלכסנת את $B$. אזי

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} V & V & 0 \\ U_1 & -U_1 & \sqrt{2} U_2 \end{pmatrix}$$

כאשר $U_1$ היא $n$ העמודות הראשונות של $U$, $U_2$ היא $m-n$ העמודות האחרונות של $U$. כעת,

$$Q^T B Q = \begin{pmatrix} \Sigma & & \\ & -\Sigma & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

כתרגיל: הראו את זה.