אנליזה נומרית 1

© ארזים

14 במאי 2017

1 איטרציות יעקובי

ראינו, בהינתן מטריצה מסדר 2 (סימטרית) איך ללכסן אותה אורתוגונלית בצעד אחד. השתמשנו בזה כדי להגדיר את המטריצות $Q^{(p,q)}$, שיעזרו לנו ללכסן אורתוגונלית את $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית.

באיטרציה k, נבחר זוג אינדקסים (p,q) ונחשב את הזוג (c,s) שיאפס את האיבר $a_{p,q}$ של A_k. כלומר נחשב

$$A_{k+1}=Q^{(p,q)^T}A_kQ^{(p,q)}$$

A_k,A_{k+1} שונות רק בשורות ועמודות p,q, ולכן A_{k+1} ניתנת לחישוב מתוך A_k תוך $8n$ פעולות כפל ועוד $4n$ חיבורים, אם לא מתחשבים בסימטריה - כלומר $O\left(n\right)$.

האלגוריתם נגדיר $U=I_n$, $\varepsilon=\delta\left|\left|A\right|\right|_F$. נגדיר

$$off\left(A\right)=\sum_{i\neq j}\left|a_{i,j}\right|^2$$

כעת, כל עוד $off\left(A\right)>\varepsilon$, נבחר p,q עבורם $a_{p,q}=\max_{i\neq j}\left|a_{i,j}\right|$. נגדיר מחדש $A=Q^{(p,q)^T}AQ^{(p,q)}$, $U=UQ^{(p,q)}$, ונחזור על הלולאה.

למה 1.1 נורמת פרובניוס נשמרת תחת העתקות אורתוגונליות. כלומר, לכל שתי מטריצות אורתוגונליות Q,Z מתקיים $\left|\left|QAZ\right|\right|_F=\left|\left|A\right|\right|_F$.

הוכחה: נורמת 2 לווקטורים אינווריאנטית תחת העתקות אורתוגונליות. על כן נורמת 2 היא אינווריאנטית תחת העתקות אורתוגונליות גם כן למטריצות. כעת,

$$\begin{aligned}\left|\left|QAZ\right|\right|_F^2&=\sum_i\left|\left|Q\left(AZ\right)_i\right|\right|_2^2=\sum_i\left|\left|\left(AZ\right)_i\right|\right|_2^2=\left|\left|AZ\right|\right|_F^2=\\&=\left|\left|Z^TA^T\right|\right|_F^2=\left|\left|A^T\right|\right|_F^2=\left|\left|A\right|\right|_F^2\end{aligned}$$

■

כעת, נראה כי $off\left(A\right)$ קטן בכל איטרציה.

עבור $A_{k+1}=Q^{(p,q)^T}A_kQ^{(p,q)}$, נסמן את הכניסות של A_{k+1} בתור $b_{i,j}$ ואת של A_k בתור $a_{i,j}$ ונקבלד

$$\begin{aligned}
off\left(A_{k+1}\right) &= \sum_{i\neq j} b_{i,j}^2 = \sum_{i,j} b_{i,j}^2 - \sum_i b_{i,i}^2 = ||A_{k+1}||_F^2 - \sum_i b_{i,i}^2 = \\
&= ||A_k||_F^2 - \sum_i b_{i,i}^2 = ||A_{k+1}||_F^2 - \sum_{i\neq p,q} a_{i,i}^2 - b_{p,p}^2 - b_{q,q}^2 = \\
&= ||A_k||_F^2 - \sum_{i\neq p,q} a_{i,i}^2 - \left(a_{p,p}^2 + a_{q,q}^2 + 2a_{p,q}^2\right) = \\
&= ||A_k||_F^2 - \sum_i a_{i,i}^2 - 2a_{p,q}^2 = off\left(A_k\right) - 2a_{p,q}^2 < off\left(A_k\right)
\end{aligned}$$

2 פירוק SVD - Singular Value Decomposition

משפט 2.1 כל מטריצה $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ ניתנת לכתיבה בצורה $A=U\Sigma V^T$, כאשר A מסדר U מסדר $m\times m$ אורתוגונלית, V מסדר $n\times n$ אורתוגונלית, Σ מסדר $m\times n$ עם ערכים אי שליליים על האלכסון הראשי, ואפס בכל מקום אחר. איברי האלכסון $\Sigma_{i,i}$ נקראים ערכים סינגולריים ומסומנים בתור σ_i.

הוכחה: נסמן $\sigma_1=||A||_2$. יהיו u_1,v_1 שני וקטורי יחידה המקיימים $Av_1=\sigma_1u_1$. כדי למצוא וקטורים כאלה, נמצא וקטור יחידה שמביא למקסימום את $||Ax||_2$. נסמן $Av_1=\mu u_1$, כאשר u_1 וקטור יחידה, μ סקלר. אזי $||Av_1||_2=\sigma_1$, כלומר

$$\sigma_1 = ||Av_1|| = ||\mu u_1|| = |\mu|\,||u_1|| = |\mu|$$

נקבע את μ להיות σ_1, ונהפוך את הסימן של u_1 אם צריך. נשלים את v_1 לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$, ואת u_1 לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^m$. נסמן U_1 את המטריצה שעמודותיה הן איברי הבסיס של $\mathbb{R}^m$ שבחרנו, V_1 את זו שעמודותיה וקטורי הבסיס של $\mathbb{R}^n$ שבחרנו. אזי

$$\begin{aligned}
S &= U_1^TAV_1 = U_1^T\left(\sigma_1u_1, Av_2, \ldots, Av_n\right) = \\
&= \begin{pmatrix}\sigma_1 & w^T\\ 0 & B\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

כאשר w וקטור, B מטריצה. נראה כי $w=0$.

$$\left|\left|S\begin{pmatrix}\sigma_1\\ w\end{pmatrix}\right|\right|_2 = \left|\left|\begin{pmatrix}\sigma_1 & w^T\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1\\ w\end{pmatrix}\right|\right|_2 \geq \sigma_1^2 + w^Tw = \sqrt{\sigma_1^2+w^Tw}\left|\left|\begin{pmatrix}\sigma_1\\ w\end{pmatrix}\right|\right|$$

כלומר, $||S||_2\geq\sqrt{\sigma_1^2+w^Tw}$, אבל ברור כי $||S||_2=||A||_2=\sigma_1$, ומכאן $w=0$.
כעת, באינדוקציה, יהי $B=U_2\Sigma_2V_2^T$ פירוק SVD של B, ואז

$$A = U_1SV_1^T = U_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & U_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \Sigma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & V_2^T\end{pmatrix}V_1^T$$

וזהו פירוק SVD של A - נגדיר

$$U = U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$$
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix}$$
$$V = V_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$$

■

2.1 תכונות של SVD

למה 2.2 הדרגה של A היא מספר הערכים הסינגולריים השונים מאפס.

הוכחה:

$$\mathrm{rk}\,(A) = \mathrm{rk}\left(U\Sigma V^T\right) = \mathrm{rk}\left(\Sigma V^T\right) = \mathrm{rk}\,(\Sigma)$$

וזה ברור. ■

למה 2.3 נניח $\mathrm{rank}\,(A) = r$. אזי

$$\begin{aligned} \mathrm{range}\,(A) &= \mathrm{span}\,\{u_1, \dots, u_r\} \\ \mathrm{null}\,(A) &= \mathrm{span}\,\{v_{r+1}, \dots, v_n\} \end{aligned}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{range}\,(A) &\iff \exists x \;\; y = Ax \\ &\iff y = U\Sigma V^T x \\ &\iff y = U\Sigma z, z = V^T x \\ &\iff y = U\left(\sigma_1 z_1, \dots, \sigma_r z_r, 0, \dots, 0\right)^T \\ &\iff y = \sum_{i=1}^{r} \left(\sigma_i z_i\right) u_i \\ &\iff y \in \mathrm{span}\,\{u_1, \dots, u_r\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x \in \mathrm{null}\,(A) &\iff ||Ax||_2 = 0 \\
&\iff \left|\left|U\Sigma V^T x\right|\right|_2 = 0 \\
&\iff \left|\left|\Sigma V^T x\right|\right|_2 = 0 \\
&\iff ||\Sigma y||_2 = 0, y = V^T x \\
&\iff y = (0, \ldots, 0, y_{r+1}, \ldots, y_n) \\
&\iff x = Vy = \sum_{i=1}^{n} y_i V_i \\
&\iff x \in \mathrm{span}\,\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}
\end{aligned}
$$

■

למה 2.4 $||A||_2 = \sigma_1$ (הערך הסינגולרי הגדול ביותר).

הוכחה:

$$||A||_2 = \left|\left|U\Sigma V^T\right|\right|_2 = ||\Sigma||_2$$

וזה ברור. ■

למה 2.5 $||A||_F = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}$.

הוכחה:

$$||A||_F = \left|\left|U\Sigma V^T\right|\right|_F = ||\Sigma||_F$$

וזה ברור. ■