אנליזה נומרית 1

© ארזים

11 במאי 2017

1 מציאת ערכים עצמיים

התחלנו לדון בשיטת החזקה ההפוכה. נתונה מטריצה A עם ערכים עצמיים $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. נתון $\mu\in\mathbb{R}$. נחפש את הווקטור העצמי שמתאים לערך העצמי μ (או לערך העצמי הכי קרוב אל μ). הערכים העצמי של המטריצה $(A-\mu I)^{-1}$ הם $\frac{1}{\lambda_i-\mu}$. אם μ קרוב לערך עצמי λ_l, אזי $\frac{1}{\lambda_l-\mu}$ הרבה יותר גדול מאשר $\frac{1}{\lambda_j-\mu}$, כאשר $j\neq l$. אז, שיטת החזקה שראינו על המטריצה $(A-\mu I)^{-1}$ תתכנס מהר לווקטור u_l.

האלגוריתם: נבחר $q^{(0)}\in\mathbb{R}^n$ רנדומלי כך שמתקיים $\left|\left|q^{(0)}\right|\right|_2=1$. כעת, פעם אחר פעם, נפתור את

$$\begin{aligned}(A-\mu I)\,z^{(k)}&=q^{(k-1)}\\ q^{(k)}&=\frac{z^{(k)}}{\left|\left|z^{(k)}\right|\right|_2}\\ \lambda^{(k)}&=\left(q^{(k)}\right)^T Aq^{(k)}\end{aligned}$$

מפרקים פעם אחת את $A-\mu I$ בפירוק LU, ואז כל איטרציה עולה $O\left(n^2\right)$.

השגיאה באיטרציה k היא $O\left(\left|\frac{\lambda_l-\mu}{\lambda_j-\mu}\right|\right)^k$, כאשר λ_l הקרוב ביותר אל μ, λ_j השני הכי קרוב.

1.1 איטרציות יעקובי

רוצים למצוא את כל הערכים העצמיים של מטריצה A. נניח כי A סימטרית.

רעיון נפעיל על A סדרה של טרנספורמציות דמון אורתוגונליות $A_{k+1}\leftarrow Q_k^TA_kQ_k$, כאשר A_{k+1} "יותר אלכסונית" (עד שהאיברים מחוץ לאלכסון מספיק קטנים).

נמצא מטריצות Q_k. נניח כי A היא בגודל 2×2.

$$\begin{pmatrix}b_{pp}&b_{pq}\\b_{qp}&b_{qq}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&s\\-s&c\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}a_{pp}&a_{pq}\\a_{qp}&a_{qq}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&s\\-s&c\end{pmatrix}$$
$$B=Q^TAQ$$

נדרוש $b_{pq} = b_{qp} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 = b_{qp} &= sca_{pp} - s^2 a_{pq} + c^2 a_{qp} - sca_{qq} = \\ &= sc\left(a_{pp} - a_{qq}\right) + a_{pq}\left(c^2 - s^2\right) \end{aligned}$$

כדי ללכסון את B צריל לפתור את זה. אם $a_{pq} = 0$ נבחר $c = 1$, $s = 0$. לכן נניח כי $q_{p,q} \neq 0$, ונקבל

$$c^2 - s^2 + \left(a_{pp} - a_{qq}\right) sc = 0$$

נגדיר $t = \frac{s}{c}, \tau = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$.

$$\begin{aligned} c^2 - s^2 - 2\tau sc &= 0 \\ 1 - \frac{s^2}{c^2} - 2\tau \frac{s}{c} &= 0 \\ t^2 + 2t\tau - 1 &= 0 \end{aligned}$$

הפתרונות הם

$$t = -\tau \pm \sqrt{1 + \tau^2}$$

אם $\tau > 0$, נבחר את הפיתרון +, ואחרת את − (כלומר את הקטן מבין שני הפתרונות בערך מוחלט). כדי לחשב את s, c נפתור את

$$\begin{aligned} t &= \frac{s}{c} \\ s^2 + c^2 &= 1 \end{aligned}$$

נקבל

$$\begin{aligned} c^2 &= 1 - s^2 = 1 - t^2 c^2 \\ c^2 &= \frac{1}{1 + t^2} \\ c &= \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \\ s &= \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \end{aligned}$$

עבור מטריצה כללית, נגדיר $Q^{(p.q)}$ דהיות מטריצה שעל האלכסון שלה תמיד יש 1 ובכל מקום אחר 0, פרט לארבעה תאים: בתא p, p נכתוב c, בתא p, q נכתוב s, בתא q, p נכתוב $-s$, ובתא q, q נכתוב c. המטריצה הזו, כשכופלים בה, משנה רק את השורות והעמודות p, q, בדיוק בצורה שראינו עבור 2×2.

האלגוריתם: באיטרציה k, נבחר אינדקס p, q מחוץ לאלכסון, ונחשב את הזוג c, s שיאפס את האיבר p, q של A_k.

$$A_{k+1} = {Q^{(p,q)}}^T A_k Q^{(p,q)}$$