הרצאה 24

תזכורת: משוואת פל - $D \in \mathbb{N}$, D לא ריבוע.
$x^2 - Dy^2 = 1$ (*). $(\pm 1, 0)$ נקראים פתרונות טריוויאליים, ואנחנו מחפשים פתרונות לא טריוויאליים.

הערה - אם $D = k^2$, אז $x^2, (ky)^2 = Dy^2$ ריבועים עוקבים, לכן בהכרח $(\pm 1, 0)$ - יש רק פתרון טריוויאלי.

טענה: אם (x,y) פתרון לא טריוויאלי, אז לכל n, אם רושמים $(x^2 - Dy^2)^n = \bar{x}_n + D\bar{y}_n$, $\bar{y}_n = y_n^2$, $\bar{x}_n = x_n^2$, x_n, y_n פתרונות למשוואת פל.

תזכורת מההוכחה: הגדרנו $x_n + \sqrt{D}y_n = X + \sqrt{D}Y = (x+\sqrt{D}y)^n$

בדקנו: $X - \sqrt{D}Y = (x - \sqrt{D}y)^n$. ואז,

$$x_n^2 - Dy_n^2 = X^2 - DY^2 = (x^2 - Dy^2)^n = 1$$

משפט 1: לכל D כנ"ל יש פתרון לא טריוויאלי ל-(*).

משפט 2: לכל D כנ"ל קיים פתרון (x_1, y_1) [שנקרא הפתרון היסודי] כך שכל פתרון של המשוואה הוא מהצורה $(\pm x_n, \pm y_n)$, כאשר x_n, y_n מוגדרים מ-(x,y) כמו בטענה.

הערה: מאחר ש-$x + y\sqrt{D} > 1$, $x_n + \sqrt{D}y_n = (x+y\sqrt{D})^n \to \infty$, יש לנו אינסוף פתרונות.

הוכחת משפט 2: ניקח $(x,y) \in \mathbb{N}$ עבורם -

$$x + y\sqrt{D} = \min_{(u,v)\in\mathbb{N}^2,\ u^2 - Dv^2 = 1} (u + v\sqrt{D})$$

המינימום קיים כי לכל קבוצה חסומה מלרע (כולם חיוביים) אם $T > 0$, הקבוצה של זוגות עם $[0,T]$ סופית, כי לסדרה אינסופית (u_i, v_i)

אם כיוון שלילי כי מגדיל, אז ש- $u_i \to \infty$

או ש- $v_i \to \infty$ לכל מקום $\rightarrow$ סתירה,

ולכן $u_i+v_i\sqrt{D} \to \infty$. (סמן $1 < z = x+y\sqrt{D}$. יהי

פתרון $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$, צריך להראות שקיים n

כך שגם הפתרון הסימטרי, $(u,v)=(x_n,y_n)$,

(x_n,y_n) כמו בתרגיל. גם הפתרון הסימטרי

נניח $u,v \geq 0$. אם $v=0$, הפתרון הוא

$u^2=u^2-D\cdot 0=1 \Leftarrow$ פתרון טריוויאלי, $u=0$, אז

$1=u^2-Dv^2=-Dv^2\leq 0$ - סתירה. לכן $u,v \in \mathbb{N}^2$. יהי

n כך ש- $z^n \leq u+v\sqrt{D} < z^{n+1}$ אם $n=0$

קיבלנו $u+v\sqrt{D} < z$ - סתירה להגדרה

z להגדרת x,y. אם $x_n+y_n\sqrt{D}=z=u+v\sqrt{D}$, אז

$x_n-u=(v-y_n)\sqrt{D} \Leftarrow x_n=u,\ v=y_n$ כנדרש.

אחרת $z^n<u+\sqrt{D}$, נרצה להגיע לסתירה...

נחלק ב- z^n ונקבל:

$$1 < \frac{u+v\sqrt{D}}{z^n} < z$$

$$1 < \frac{u+v\sqrt{D}}{x_n+y_n\sqrt{D}} < z$$

$$\frac{(u+\sqrt{D})(x_n-y_n\sqrt{D})}{(x_n+y_n\sqrt{D})(x_n-y_n\sqrt{D})} = \frac{ux_n-vy_nD+(x_nv-y_nu)\sqrt{D}}{\underbrace{x_n^2-y_n\sqrt{D}}_{=1}} =$$

$$= (ux_n-vy_nD)+(x_nv-y_nu)\sqrt{D}$$

סוף,

$$1 < ux_n - vy_nD + (x_nv - y_nu)\sqrt{D} < z$$

$$1 < s + t\sqrt{D} < z$$

נוכיח שגם s,t פתרון. זה נובע מהמבנה הכפלי של פתרונות: כפל ומנה של פתרונות הוא פתרון גם כן.

$$s^2 - t^2D = (s+t\sqrt{D})(s-t\sqrt{D}) = (s+t\sqrt{D})(s+t\sqrt{D})' =$$

$$= \left(\frac{u+v\sqrt{D}}{x_n+y_n\sqrt{D}}\right)\left(\frac{u+v\sqrt{D}}{x_n+y_n\sqrt{D}}\right)' = \frac{\|u+v\sqrt{D}\|}{\|x_n+y_n\sqrt{D}\|} = \frac{1}{1} = 1$$

אם נראה ש- $s,t \in \mathbb{N}$ - נקבל סתירה למינימליות $z = x+y\sqrt{D}$.

<u>מבנה המבחן:</u>

5 שאלות, מתוכן 4 - את מה-5 שאלות הוכחה. לא נשאל על חלק ההגדרות הרגילות. שאר השאלות - דומות (מאוד!) לדפי התרגיל. חלק מהשאלות יהיו פשוטות שאלות מדפי התרגיל וחלק יהיו מאוד דומות.