קירובים דיופנטיים ~~חלק~~ ושברים משולבים

תזכורת

משפט דיריכלה - לכל $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, יש אינסוף פתרונות ל- $|x-\frac{p}{q}|\le\frac{1}{q^2}$

שברים משולבים: לכל $x\in\mathbb{R}$, $x\notin\mathbb{Q}$, $x=[a_0;a_1,\dots]$, $\frac{p_n}{q_n}=[a_0;a_1,\dots a_n]$

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

בתרגיל מגדירים - x מקורב רע אם יש $c>0$ כך שלכל p,q $\;|x-\frac{p}{q}|\ge\frac{c}{q^2}$

משפט ליוביל - אם x אלגברי מדרגה d (פותר פולינום עם מקדמים שלמים מדרגה d וזה מינימלי עם תכונה זו) אז לכל $x\neq\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, $\;|x-\frac{p}{q}|\ge\frac{c}{q^d}$

מסקנה - אלגבריים מדרגה 2 הם מקורבים רע.

הגדרה - אם $x=[a_0;a_1,a_2\dots]$ נאמר ש- x מחזורי מִמָקום מסוים אם קיימים $K\ge 0$ ו- m כך שלכל $l\ge K$, $a_l=a_{l+m}$

דוגמה - $x=\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\phi=[1;1,1,1,\dots]$

- $x=[5;2,7,4,1,7,4,1\dots]$ $\quad x=$

סימון - $x=[5;2,\overline{7,4,1}]$

משפט לגרנז' - x אלגברי מדרגה 2 $\longleftrightarrow$ x מחזורי ממקום מסוים

תזכורת - הוכחנו $A=\begin{bmatrix}p_n & p_{n-1}\\ q_n & q_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\dots\cdot\begin{bmatrix}a_n & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

הגדרנו בתרגיל בתחילת הסמסטר: $GL(2,\mathbb{Z})$ - מטריצות 2×2 עם מקדמים שלמים ו- $\det=\pm1$

נשים לב ש- $A\in GL(2,\mathbb{Z})$

באותו תרגיל הוכחנו ~~ש~~ שכל $g\in GL(2,\mathbb{Z})$ ניתן להציג כך:

$g=u^{r_1}v^{s_1}u^{r_2}v^{s_2}\cdot\dots\cdot u^{r_k}v^{s_k}$, $\quad u=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, $r_i,s_i\in\mathbb{Z}$

בשביל ההוכחה נגדיר כמה הגדרות ומושגים:

אם $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ מטריצה 2×2 הפיכה עם מקדמים שלמים/ממשיים/ מרוכבים

ואם x שלם/ממשי/מרוכב אז נסמן $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cdot x=\frac{ax+b}{cx+d}$

נוכיח בתרגיל - אם g_1,g_2 מטריצה כנ"ל, אז: $g_1\cdot(g_2\cdot x)=(g_1 g_2)\cdot x$

וכמו כן קל לראות: $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot x=x$

הוכחת משפט לגרנז'

נרשום $\alpha=[a_0;a_1,a_2,\dots]$

נניח ש-α אלגברי מדרגה 2, כלומר $P=Ax^2+Bx+C$, $P(\alpha)=0$ $(A,B,C\in\mathbb{Z},\ A\neq 0)$

ויש - $\alpha\notin\mathbb{Q}$

נסמן $\alpha_0=\alpha$, $\alpha_k=[a_k;a_{k+1}\dots]$

די להוכיח שיש $k\geq 0$, $k+m$, $m>0$ כך ש- $\alpha_{k+m}=\alpha_k$

אם זה נכון, אז לכל l, $a_{k+l}=$ הספרה ה-l של המספר α_k $=$ הספרה ה-l של המספר α_{k+m} $=a_{k+l+m}$

נוכיח שכל המספרים α_k הם אלגבריים מדרגה 2, ופותרים משוואות $P_k(x)=A_kx^2+B_kx+C_k$ כאשר C_k,B_k,A_k חסומים.

מאחר ש- -"- חסומים ושלמים, יש $m+k$, k כך ש- $P_k=P_{k+m}$, (מפני שיש מספר סופי של פולינומים כאלה)

נשים לב -

$$\alpha_0=[a_0;a_1,a_2\dots]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\dots}}=a_0+\frac{1}{[a_1;a_2\dots]}=a_0+\frac{1}{\alpha_1}=$$

$$=\frac{a_0\alpha_1+1}{\alpha_1}=\begin{bmatrix}a_0&1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\alpha_1$$

באינדוקציה על k:

$$\alpha_0=\begin{bmatrix}a_0&1\\1&0\end{bmatrix}\alpha_1=\begin{bmatrix}a_0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&1\\1&0\end{bmatrix}\alpha_2=\dots=$$

$$=\begin{bmatrix}a_0&1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\ \dots\ \cdot\begin{bmatrix}a_k&1\\1&0\end{bmatrix}\alpha_{k+1}=\begin{bmatrix}p_k&p_{k-1}\\q_k&q_{k-1}\end{bmatrix}\alpha_{k+1}$$

נניח $y=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}x$, $P(y)=0$. אז $0=Ay^2+By+C=$

$$=A\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^2+B\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+C\iff$$

$$\iff\quad 0=A(ax+b)^2+B(ax+b)(cx+d)+C(cx+d)^2\iff$$

$$\iff\quad 0=\underline{(Aa^2+Bac+Cc^2)}x^2+\underline{(2Aab+B(ad+bc)+2Ccd)}x+\underline{(Ab^2+Bbd+Cd^2)}$$

הוכחנו ש- α_{k+1} אלגברי מדרגה 2 לכל k.

עלינו להוכיח שהמקדמים הנ"ל חסומים ע"י מספרים שלא תלוים ב-k אם $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_k&p_{k-1}\\q_k&q_{k-1}\end{bmatrix}$

$$A_k=Ap_k^2+Bp_kq_k+Cq_k^2=q_k^2\left(A\left(\frac{p_k}{q_k}\right)^2+B\left(\frac{p_k}{q_k}\right)+C\right)=q_k^2\,P\left(\frac{p_k}{q_k}\right)=$$

$$\underset{\uparrow}{=}q_k^2\,A\left(\frac{p_k}{q_k}-\alpha\right)\left(\frac{p_k}{q_k}-\beta\right)$$

$P(x)=A(x-\alpha)(x-\beta)$

α,β שורשי של P

$$|A_k|\leq|A|\cdot\underbrace{\left|q_k^2\cdot\left|\frac{p_k}{q_k}-\alpha\right|\right|}_{\text{חסום כי } \left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{q_k^2}}\cdot\underbrace{\left|\underset{\downarrow\alpha}{\frac{p_k}{q_k}}-\beta\right|}_{\text{חסום}}\implies \underline{|A_k|\ \text{חסום}}$$

חסום - C_k $\qquad C_k = Ap_{k-1}^2 + Bp_{k-1}q_{k-1} + Cq_{k-1}^2$

אותה הוכחה תעבוד, עם $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ במקום $\frac{p_k}{q_k}$

כדי להראות ש- B_k חסום, נראה ש- $\Delta_k = B_k^2 - 4A_kC_k = \Delta_0 = B^2-4AC$
לא תלויה ב - k.

מכך ינבע ש- $|B_k| = \sqrt{\Delta_k + 4A_kC_k}$

העתקת מביוס עם מקדמים שלמים לא משנה דיסקרימיננטה:
מספיק לבדוק רק עבור העתקות המביוס u,v מהתרגיל.

העתקת מביוס $u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\Leftarrow$

$$Ay^2+By+C=0$$
$$\Updownarrow$$
$$Cx^2+Bx+A=0$$

הביטוי $\Delta=B^2-4AC$ לא משתנה כשמחליפים תפקידי A,C.

העתקת המביוס $v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$Ay^2+By+C=0$$
$$\Updownarrow$$
$$A(x+1)^2+B(x+1)+C=0$$
$$\parallel$$
$$Ax^2+x(B+2A)+A+B+C$$

$$\Delta=(B+2A)^2-4A(A+B+C)=B^2-4AC$$

Δ לא משתנה

תזכורת

אומרים ש- $\alpha=[a_0;a_1,a_2\dots]$ מחזורי ממקום מסוים אם יש $K\geq 0$, כך שלכל $k\geq k_0$. $a_k=a_{k+l}$

במילים אחרות - נסמן $\alpha_k=[a_k;a_{k+1},\dots]$ כאשר $\alpha=\alpha_0=[a_0;a_1,a_2\dots]$
אז α מחזורי ממקום מסוים אם יש l, $k_0\geq 0$ כך ש- $\alpha_k=\alpha_{k+l}$

α תקרא אלגברי ממעלה d אם יש פולינום במקדמים שלמים ודרגה d כך ש-α הוא שורש שלו, ו-d המספר המינימלי של תכונה זו.

משפט לגרנז' - α אלגברי מדרגה 2 $\longleftrightarrow$ α מחזורי ממקום מסוים. (הוכחנו $\leftarrow$)

יהי $D\in\mathbb{Q}$ כך שאין $d\in\mathbb{Q}$ כך ש- $d^2=D$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{D})=\{a+b\sqrt{D}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$$

הערה - הגדרנו כבר:
$$\mathbb{Z}[\sqrt{D}]=\{a+b\sqrt{D}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$$

טענה - $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ הוא שדה.

הוכחה - $\mathbb{Q}(\sqrt{D})\subset\mathbb{C}$ לכן מספיק לראות ש- $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ סגורה לחיבור חסור, כפל, חילוק.

הם קלים, נראה רק חילוק: $a_1,a_2\ b_1,b_2\in\mathbb{Q}$

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{D}}{a_2+b_2\sqrt{D}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{D})(a_2-b_2\sqrt{D})}{(a_2+b_2\sqrt{D})(a_2-b_2\sqrt{D})}=\frac{a_1a_2-b_1b_2D+\sqrt{D}(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2-Db_2^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2-b_1b_2D}{a_2^2-Db_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2-Db_2^2}\sqrt{D}$$

טענה - אם $\alpha\in\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ אז α שורש של פולינום מדרגה 2 עם מקדמים רציונליים.

הוכחה - אם $\alpha=a+b\sqrt{D}$ אז נרשום $P(x)=(x-\alpha)(x-a+b\sqrt{D})$

ברור ש- $P(\alpha)=0$, $\deg P=2$. נבדוק שמקדמיו רציונליים:

$$P(x)=(x-a-b\sqrt{D})(x-a+b\sqrt{D})=(x-a)^2-(b\sqrt{D})^2=x^2-2ax+a^2-b^2D$$

תזכורת - העתקת מביוס: $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}x=\frac{ax+b}{cx+d}$

הוכחנו שלכל k: $\alpha_0=\begin{bmatrix}p_k&p_{k-1}\\q_k&q_{k-1}\end{bmatrix}\alpha_{k+1}$

סימון - $\alpha=\alpha_0=[a_0;a_1,a_2\dots]$

$\alpha_k=[a_k;a_{k+1}\dots]$

הוכחת משפט לגרנז' $\Longrightarrow$

נתון $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. עבור אחת עלינו להוכיח ש- α אלגברי מדרגה 2.
נניח תחילה ש- $k=0$. כלומר $\alpha_0 = \alpha_m$ $\leftarrow$ $\alpha_m = \alpha_0 = \begin{bmatrix} P_{m-1} & P_{m-2} \\ q_{m-1} & q_{m-2} \end{bmatrix}$

לכן $$\alpha_m = \frac{P_{m-1}\alpha_m + P_{m-2}}{q_{m-1}\alpha_m + q_{m-2}}$$

$\Leftarrow$ $$\alpha_m(q_{m-1}\alpha_m + q_{m-2}) = P_{m-1}\alpha_m + P_{m-2}$$

$\Leftarrow$ $$q_{m-1}\alpha_m^2 + (q_{m-2} - P_{m-1})\alpha_m - P_{m-2} = 0$$

מצאנו פולינום מדרגה 2 ש- $\alpha_0 = \alpha_m$ פתרון שלו.
משהר של- α_0 פיתוח שבר משולב אינסופי, $\alpha_0 \neq \mathbb{Q}$ לכן α_0 אלגברי מדרגה 2.

המקרה הכללי - $0 < k < m$. נתון $\alpha_k = \alpha_m$.
אם חוזרים על ההוכחה הקודמת מקבלים ש- α_k הוא אלגברי מדרגה 2.
α_k ממשי ושורש של פולינום מדרגה 2, אפשר לרשום $\alpha_k = a + b\sqrt{D}$
$(a, b, D \in \mathbb{Q})$. כלומר $\alpha_k \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

$$\alpha_0 = \frac{P_{k-1}\alpha_k + P_{k-2}}{q_{k-1}\alpha_k + q_{k-2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$$

α נקבע באמצעות פעולות השדה