חזרה לבחן

תזכורת - קירובים דיופנטיים ושברים משולבים

משפט דיריכלה - לכל $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ יש אינסוף $p_n/q_n \in \mathbb{Q}$ כך ש: $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$

משפט ליוביל - נניח ש- $x \in \mathbb{R}$ אלגברי מדרגה d.

א - $d=1$: יש $c>0$ כך שלכל $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\frac{p}{q} \neq x$ מתקיים $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q}$

ב - $d>1$ -״- -״- מתקיים $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^d}$

דוגמה: $d=2$:

$$\frac{c}{q_n^2} \underset{\text{ליוביל}}{\leq} \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \underset{\text{דיריכלה}}{<} \frac{1}{q_n^2}$$

שברים משולבים: $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$[a_0; a_1 \dots a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots \cfrac{1}{a_n}}}$$

אם $n = \infty$,

$$[a_0; a_1 a_2 \dots] = \lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n}$$

כאשר

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1 a_2 \dots a_n]$$

(*) הוכחנו: לכל $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ יש $a_0, a_1 a_2 \dots$ כנ״ל כך ש- $x = [a_0; a_1, a_2 \dots]$

נוכיח: יתרה מזו, אם n זוגי:

$$\frac{p_0}{q_0} < \dots < \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} < \frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} < \dots < x < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \dots < \frac{p_1}{q_1}$$

ומתקיים

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}$$

וכמובן שההצגה יחידה.

ראינו גם: $\{(a_0, \dots, a_n) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N}, i \geq 1\} \to \mathbb{Q}$

$$(a_0, \dots a_n) \longmapsto [a_0; a_1, \dots a_n]$$

ראינו שהעתקה זו היא על ו- 2 ל-1.

כלומר לכל $x \in \mathbb{Q}$ יש בדיוק 2 דרכים להציג:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 \dots \cfrac{1}{a_n}}, \quad x = a + \frac{1}{1} = a$$

היום נוכיח: $\{(a_0, a_1 \dots) : a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N}, i \geq 1\} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$(a_0, a_1, a_2 \dots) \longmapsto [a_0; a_1, a_2 \dots]$$

היא חח״ע ועל.

משפט - ההעתקה $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \longmapsto \{(a_0,a_1,a_2\dots) \mid a_0\in\mathbb{Z}, a_i\in\mathbb{N}, i>0\}$
המוגדרת ע"י $[a_0;a_1,a_2\dots] \longmapsto (a_0,a_1,a_2\dots)$ היא חח"ע ועל.

הוכחה: ~~[illegible]~~ נותר להוכיח ש- $[a_0;a_1,a_2\dots]$ אינו רציונלי, ושההעתקה חח"ע (על הוכחנו).

אם נחזור על הנימוקים שניתנו בהוכחת המשפט $(*)$, נראה שהגבול $x=[a_0;a_1,\dots]$ מקיים

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

ובפרט יש ל-x אינסוף קירובים שונים המקיימים

$$\frac{1}{q_n^2} > \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{c}{q_n} \Longrightarrow q_n < \frac{1}{c} < \infty \Rightarrow \text{סתירה}$$

אם x רציונלי $x\neq\frac{p_n}{q_n}$ .1

חח"ע - נניח $(b_0,b_1,\dots)\neq(a_0,a_1,\dots)$
עלינו להוכיח $[b_0;b_1,\dots]\neq[a_0;b_1,\dots]$
נביט בביטוי:

$$0 < \frac{1}{a_1+1} \le \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2\dots}} < \frac{1}{a_1} \le 1$$

לכן $\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2\dots}}\in(0,1)$

אם $a_0\neq b_0$, אז בה"כ $a_0<b_0 \Leftarrow$

$$[a_0;a_1,\dots]=a_0+\frac{1}{a_1+\dots} < a_0+1 \le b_0 < b_0+\frac{1}{b_1+\dots}$$

לכן $[a_0;a_1,\dots]\neq[b_0;b_1,\dots]$

~~[illegible]~~ נסמן ב-$l+1$ ~~[illegible]~~ את האינדקס הראשון בו הסדרות שונות
אז:

$$y=\frac{1}{b_{l+1}+\frac{1}{\dots}},\quad x=\frac{1}{a_{l+1}+\frac{1}{\dots}},\quad x\neq y$$

$$[a_0;a_1,\dots]=a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{\ddots a_l+x}},\quad [b_0;b_1,\dots]=a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{\ddots a_l+y}}$$

בגלל המונוטוניות של הביטוי $z\longmapsto a_0+\frac{1}{a_1+\dots\frac{1}{a_l+z}}$

הגבולות לא שווים.

שימוש בשברים משולבים להוכחת קיום מספר טרנסצנדנטי

נזכור שאם α אלגברי (כלומר לא טרנסצנדנטי) מדרגה d אז יש $c>0$
כך שלכל $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, $\frac{p}{q}\neq\alpha$ מתקיים
$$\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|\ge\frac{c}{q^d}$$

נבנה α באמצעות שברים משולבים, כך שיתקיים לכל n $\quad|\alpha-\frac{p_n}{q_n}|<\frac{1}{q_n^n}\quad(**)$

נבנה את α ע"י הגדרת ה- a_n-ים באינדוקציה

$a_0=0$. נניח שנבחרו $a_0...a_n$ ש- $[a_0;a_1...a_n]=\frac{p_n}{q_n}$ מקיים $(**)$

עתה נבחר $a_{n+1}=q_n^{n-2}$, כי אז $|\alpha-\frac{p_n}{q_n}|<\frac{1}{a_{n+1}q_n^2}=\frac{1}{q_n^n}$

אז $(**)$ מתקיים עבור q_n, וממשיכים.

נניח בשלילה ש- α אלגברי מדרגה d.
לפי ליוביל יש $c>0$ כך שלכל $\alpha\neq\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ $\quad|\alpha-\frac{p}{q}|\ge\frac{c}{q^d}$.

נשתמש ב- $\frac{p}{q}=\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_n}{q_n}\neq\alpha$. $\quad\frac{1}{q_n^n}\ge|\alpha-\frac{p_n}{q_n}|\ge\frac{c}{q_n^d}$ ⇐ $\frac{1}{c}>q_n^{n-d}$

סתירה.

סימון: עבור $x\in\mathbb{R}$,
$$\langle x\rangle=\min_{y\in\mathbb{Z}}|x-y|=dist(x,\mathbb{Z})$$

משפט - המכנים q_n של הקרובים $\frac{p_n}{q_n}=[a_0;a_1...a_n]$ עבור $\alpha=[a_0;a_1,...]$ מאופיינים ע"י התכונה הבאה:
$$\langle q_n\alpha\rangle=\min_{\substack{r\le q_n\\ r\text{ טבעי}}}\langle r\alpha\rangle$$
יתרה מזאת:

א - הסדרה $\langle q_n\alpha\rangle\searrow 0$

ב - לכל n ולכל $a,b\in\mathbb{Z}$, $1\le b<q_{n+1}$, $|b\alpha-a|\ge\langle q_n\alpha\rangle$

במילים אחרות: מסתכלים על הסדרה $\alpha,2\alpha...N\alpha$. לכל N, עבורו $\langle N\alpha\rangle<\min_{j=1..N-1}\langle j\alpha\rangle$ רושמים את N.
הסדרה שמתקבלת היא בדיוק סדרת המכנים שנותנים השברים המשולבים של α.

הוכחה: נוכיח תחילה את ב'. נניח בשלילה שיש שלמים a,b המקיימים: $1\le b<q_{n+1}$, $|b\alpha-a|<\langle q_n\alpha\rangle$. נרצה להגיע לסתירה.

נגדיר משתנים u,v לפי: $\begin{bmatrix}p_n&p_{n+1}\\q_n&q_{n+1}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $\quad\begin{matrix}p_nu+p_{n+1}v=a\\q_nu+q_{n+1}v=b\end{matrix}$

שים לב ש- u,v מתקבלים ע"י: $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}p_n&p_{n+1}\\q_n&q_{n+1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

(חישבנו את הדטרמיננטה של המטריצה בהוכחה קודמת, היא שווה ±1).

מנוסחת קרמר נקבל ש- $\begin{bmatrix}p_n&p_{n+1}\\q_n&q_{n+1}\end{bmatrix}^{-1}=\pm1\begin{bmatrix}q_{n+1}&-p_{n+1}\\-q_n&p_n\end{bmatrix}$

זו מטריצה שלמה, לכן $u,v\in\mathbb{Z}$

המשך הוכחת המשפט:

נפריד למקרים: א- $u=0$

ב- $v=0$

ג- $uv>0$ (שווי סימן)

ד- $uv<0$ (שוני סימן)

א- אם $u=0$ אז $q_{n+1}v=b$. סתירה לכך ש- $v\in\mathbb{Z}$, ו- $1\le b<q_{n+1}$

ב- אם $v=0$ אז $p_n u=a$, $q_n u=b$

$$|b\alpha-a|=|q_n u\alpha-p_n u|=|u||q_n\alpha-p_n|\ge|q_n\alpha-p_n|\ge\langle q_n\alpha\rangle$$

סתירה.

ג- אם ל- u,v אותו סימן: $q_n u+q_{n+1}v=b$

חיוביים

אז מאחר ש- $b\ge1$, u,v חייבים להיות חיוביים.

$b>q_{n+1}v\ge q_{n+1}$ ← סתירה

ד- ל- u,v סימנים הפוכים:

$$|b\alpha-a|=|(q_n u+q_{n+1}v)\alpha-(p_n u+p_{n+1}v)|=$$
$$=|u(q_n\alpha-p_n)+v(q_{n+1}\alpha-p_{n+1})|=$$
$$=|u(q_n\alpha-p_n)|+|v(q_{n+1}\alpha-p_{n+1})|\ge$$
$$\ge|u||q_n\alpha-p_n|\ge|q_n\alpha-p_n|\ge\langle q_n\alpha\rangle$$

← סתירה.

מעבר הצהנטן ← בגלל של- u,v סימנים שונים, וגם $q_n\alpha-p_n$ ול- $q_{n+1}\alpha-p_{n+1}$ לכן לאו״ש שיוויון.

והוכחנו את ב'.

נוכיח את א' באינדוקציה על n. בהוכחה מלפני שבועיים ראינו שאם n זוגי אז $\frac{p_n}{q_n}<\alpha<\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ ו- a_{n+2} הוא המספר ה- j הגדול ביותר עבורו:

$$\frac{p_n+j\,p_{n+1}}{q_n+j\,q_{n+1}}<\alpha$$

מונוטוני עולה ב- j

לפי הנחת האינדוקציה $\langle q_n\alpha\rangle>\langle q_{n+1}\alpha\rangle$

$\langle q_n\alpha\rangle=|q_n\alpha-p_n|=q_n\alpha-p_n$

$\langle q_{n+1}\alpha\rangle=|q_{n+1}\alpha-p_{n+1}|=p_{n+1}-q_{n+1}\alpha$

הביטוי הגדול ביותר עבור הביטוי חיובי

נסתכל על $(q_n+j\,q_{n+1})\alpha-(p_n+j\,p_{n+1})=\langle q_n\alpha\rangle-j\langle q_{n+1}\alpha\rangle$

חיובי; חיובי קטן יותר

לכן אם $a_{n+2}=j$, נקבל ביטוי שקטן מ- $\langle q_{n+1}\alpha\rangle$