21/12

תרגול 8 שבוע 8

תחשיב היחסים:

מילון σ מורכב מ-

- סימני יחס R_i^n $\quad$ n – הערכיות של היחס, i – אינדקס $\quad$ $R_1(\cdot,\cdot)$

- סימני פונקציה f_i^n $\quad$ $f_i(\cdot,\cdot)$

- סימני קבוע c_i

דוג'

$$\sigma = (R_1(\cdot),\ R_2(\cdot,\cdot),\ f_1(\cdot),\ f_2(\cdot,\cdot),\ c_1)$$

קבוצת משתנים $\{x_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ (מסומנים x,y,z)

קבוצת שמות העצם מעל σ מוגדרת באינדוקציה:

בסיס: כל משתנה x, x הוא ש"ע

כל סימן קבוע c, c הוא ש"ע

סגירות: לכל סימן פונקציה f_i n-מקומי ב-σ, ולכל ש"ע $t_1,t_2,\ldots,t_n$ $\quad$ $f_i(t_1,\ldots,t_n)$ הוא ש"ע

דוגמאות: (σ מהדוגמה הקודמת)

x_1 ש"ע $\quad$ (ש"ע מציין איבר, אינטואיטיבית, לעומת [illegible])

c_1 ש"ע $\quad$ $f_2(f_1(x_1), f_2(x_4,c_1))$ – גם ש"ע

$f_1(x_1,x_2)$ – לא ש"ע

$R_2(x_1,x_2)$ – לא ש"ע

קבוצת הנוסחאות מעל מילון σ מוגדרת באינדוקציה:

בסיס (נוסחאות אטומיות): לכל סימן יחס R_i n-מקומי ב-σ

ולכל ש"ע $t_1,\ldots,t_n$ $\quad$ $R_i(t_1,\ldots,t_n)$ נוסחה אטומית.

סגירות: – קשרים: אם α,β נוסחאות אז

$\neg\alpha,\ \alpha\wedge\beta,\ \alpha\vee\beta,\ \alpha\leftrightarrow\beta,\ \alpha\to\beta$ נוסחאות.

כמתים: אם α נוסחה, ו-x משתנה

אז $\forall x\,\alpha$

$\exists x\,\alpha$ נוסחאות.

(* **הערה:** יש משפט קריאה יחידה גם לנוסחאות)

דוגמאות: $R_1(x_1)$ - נוסחה אטומית.

$R_1(f(x_1))$ - נוסחה אטומית.

$R_1(f_1(x_1)) \cap R_2(x_3, x_4)$ - נוסחה

נוסחאות
$$\begin{cases} \forall x_1 \ R_2(x_1, x_2) \\ \forall x_3 \ R_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

~~משתנים חופשיים~~ וקשורים

~~[illegible]~~

עבור נוסחא φ, נגדיר באינדוקציה על מבנה φ את קבוצת המשתנים החופשיים ב- φ, $FV(\varphi)$.

בסיס: אם φ נוסחה אטומית. $FV(\varphi) =$ כל המשתנים שמופיעים ב- φ.

צעד: אם $\varphi = \neg\alpha$ $\quad FV(\varphi) = FV(\alpha)$

אם $\varphi = \alpha \circ \beta$ $\quad FV(\varphi) = FV(\alpha) \cup FV(\beta)$

אם $\varphi = \forall x \alpha$ / $\exists x \alpha$ $\quad FV(\varphi) = FV(\alpha) \setminus \{x\}$

דוגמה:

$$\alpha = \exists x \, (\forall y \ R_1(\underset{\text{קשור}}{y}) \to R_2(x, \underset{\text{חופשי}}{y}))$$

x קשור, y חופשי $y \in FV(\alpha)$

(אפשר להגדיר לכל מופע של משתנה אם הוא חופשי/קשור.
משתנה חופשי ב-α אם יש לו מופע חופשי ב-α)

⊛ משתנה שאינו חופשי נקרא קשור

סמנטיקה:

מבנה M עבור שפה σ מורכב מ-

- $D^M \neq \emptyset$ "העולם"
- לכל סימן יחס n-מקומי R_i ב- σ, יש ב- M יחס $R_i^M \subseteq (D^M)^n$ n מקומי

Scanned by CamScanner

לכל סימן פונקציה n-מקומי f_i ב-σ יש ב-M פונקציה

$$f_i : (D^M)^n \to D^M$$

דוגמה: $\sigma = (R(\cdot,\cdot), F(\cdot,\cdot), c)$

$$M_1 = \left(\underbrace{\{0,1,2\}}_{D^M}, \{(0,0)\}, f(a,b)=1, 2\right)$$

לכל a,b

$$M_2 = (\mathbb{N}, \le, +, 0)$$

השמה V עבור מבנה M היא פונקציה:

$$V: \{x_i \mid i\in \mathbb{N}\} \to D^M$$

ההשמה המורחבת $\bar{V}$ היא פונקציה:

$\bar{V}$: קבוצת ש"ע מעל σ $\to D^M$

שמוגדרת באינדוקציה

בסיס:

$$\bar{V}(x_i) = V(x_i)$$

$$\bar{V}(c_i) = c_i^M$$

סימן קבוע   איבר ב-D^M

צעד האינדוקציה:

$$\bar{V}(f(t_1,\dots,t_n)) = f^M(\bar{V}(t_1),\dots,\bar{V}(t_n))$$

הגדרה: M מבנה, V השמה, $d\in D^M$ ההשמה $V[d/x_i]$ מוגדרת באופן הבא:

(תנועה, ש מעון ברקע ...)

$$V[d/x_i](x_j) = \begin{cases} V(x_j) & i\neq j \\ d & j=i \end{cases}$$

מתי מבנה M והשמה V מספקים נוסחה φ? $(M,V\models\varphi)$

ההגדרה היא באינדוקציה על מבנה φ

בסיס: $M,V\models R(t_1,\dots,t_n)$

אם: $(\bar{V}(t_1),\dots,\bar{V}(t_n))\in R^M$

צעד האינדוקציה: קשרים

$$M,V\models\alpha\wedge\beta$$

אם $M,V\models\alpha$ וגם $M,V\models\beta$.

כמובן: (*) $M,v\models\forall x\alpha$ אם לכל $d\in D^M$

$$M,v[d/x]\models\alpha$$

(*) $M,v\models\exists x\alpha$ אם קיים $d\in D^M$

$$M,v[d/x]\models\alpha$$

דוגמא: $\sigma=(R(\cdot,\cdot))$

$$\varphi=\exists x\, R(x,y)$$

$$M=(\underbrace{\{0,1\}}_{D^M},\underbrace{\{(0,0)\}}_{R^M})$$

תהי v השמה. האם $M,v\models\varphi$?

$M,v\models\varphi \iff$ קיים $d\in D^M$ כך ש- $M,\underbrace{v[d/x]}_{v'}\models R(x,y)$

$\iff$ קיים $d\in D^M$ כך ש- $(\bar{v'}(x),\bar{v'}(y))\in R^M$

$\iff$ קיים $d\in D^M$ כך ש-

$$(d,v(y))\in R^M$$

משפט: תהי φ נוסחה, M מבנה, ו- v_1,v_2 השמות כך שלכל $x\in FV(\varphi)$ $v_1(x)=v_2(x)$ אז $M,v_1\models\varphi \iff M,v_2\models\varphi$.

- נוסחה α כך ש- $FV(\alpha)=\emptyset$ נקראת נוסחה סגורה, או פסוק.
- מסקנה: אם α פסוק אז שכל ההשמות מספקות או שאף אחת לא. (במילים אחרות הנכונות תלויה רק במבנה)