תרגול 7 (שבוע 7)

ספירות:

תזכורת: תהי $\Sigma \subseteq WFF$. קבוצת המודלים של Σ היא הקבוצה $\{v \mid v \text{ מספקת את } \Sigma\}$ ומסומנת $Ass(\Sigma)$

דוג': $\Sigma_1 = \emptyset$ כל ההשמות $= Ass(\Sigma_1)$

$\Sigma_2 = \{p_0 \vee \neg p_0\}$ כל ההשמות $= Ass(\Sigma_2)$

$\Sigma_3 = WFF$ $\quad Ass(\Sigma_3) = \emptyset$

אפשר לחשוב על Ass בתור פונק' $Ass: \text{קב' פסוקים} \to \text{קב' של השמות}$

הגדרה: קב' השמות K תקרא ספירה אם יש $\Sigma \subseteq WFF$ כך ש- $Ass(\Sigma) = K$

משיקולי ספירה קיימות קבוצות שאינן ספירות.

תרגיל: (חימום)

נגדיר

$$K_{even} = \{v \mid \text{לכל } i \text{ זוגי } v(p_i) = T\}$$

הוכיחו: K_{even} ספירה

הוכחה: נמצא קב' פסוקים Σ_{even} כך ש-

$$Ass(\Sigma_{even}) = K_{even}$$

$$\Sigma_{even} = \{p_i \mid i \text{ זוגי}\}$$

נוכיח: $Ass(\Sigma_{even}) = K_{even}$

$$v \models \Sigma_{even} \iff \text{לכל } i \text{ זוגי } v \models p_i \iff v \in K_{even}$$

תרגיל: יהי $j \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$K_j = \left\{ v \;\middle|\; \begin{array}{c} v \text{ נותנת} \\ T \text{ בדיוק} \\ \text{ל-} j \text{ משתנים} \\ \text{שונים} \end{array} \right\}$$

טענה: לכל j, K_j גדירה.

הוכחה: נמצא קבוצת פסוקים Σ_j כך ש- $Ass(\Sigma_j)=K_j$

אבחנה: תהי $v\in K_j$ ו- $A\subseteq \mathbb{N}$ $|A|=j+1$

אז קיים $i\in A$ ש- $v\not\models p_i$

הגדרה: $A\subseteq \mathbb{N}$ $|A|=j+1$, נגדיר:

$$\varphi_A = \neg\left(\bigwedge_{i\in A} p_i\right)$$

אופציה 2: $\varphi_A = \bigwedge_{i=1}^{k} p_i \to \neg p_{k+1}$ (לכל סידור של $(p_1,\dots,p_{k+1})\in A$)

טענה 1: $v\models\varphi_A \iff$ קיים $i\in A$ ש- $v\not\models p_i$

(השתמשנו בטענה ש- A סופי כשבאנו להגדיר את φ_A)

נגדיר:

$$\Sigma_j = \left\{\varphi_A \;\middle|\; \begin{matrix} A\subseteq\mathbb{N} \\ |A|=j+1\end{matrix}\right\}$$

נראה $Ass(\Sigma_j)=K_j$

$\subseteq$: תהי $v\in K_j$, מהאבחנה וטענה 1 $v\models\varphi_A$

לכל $A\subseteq\mathbb{N}$ $|A|=j+1$ לכן $v\models\Sigma_j$

$\supseteq$: תהי $v\notin K_j$ לכן קיימת $B\subseteq\mathbb{N}$ $|B|=j+1$

לכל $i\in B$ $v\models p_i$, לכן $v\not\models\varphi_B$ אבל $\varphi_B\in\Sigma_j$

לכן $v\not\models\Sigma_j$.

תרגיל:

$$K_{inf} = \left\{ v \;\middle|\; \begin{matrix} v \text{ נותנת את הערך} \\ T \text{ לאינסוף} \\ \text{אטומים} \end{matrix} \right\}$$

טענה: K_{inf} אינה גדירה

הוכחה: נניח בשלילה שיש קבוצת פסוקים X כך ש- $Ass(X)=K_{inf}$

נמצא קבוצת פסוקים Y כך ש- $X\cup Y$ לא ספיקה, אבל כל

תת קבוצה סופית $E\subseteq X\cup Y$ ספיקה. אבל זו סתירה למשפט הקומפקטיות.

(לכן כזו לא יכולה להיות קיימת)

$$Ass(X\cup Y) = Ass(X)\cap Ass(Y) = K_{inf}\cap Ass(Y)$$

(שים לב כדי שלא יהיה p_i ב- X ו- $\neg p_i$ ב- Y)

נרצה לבחור Y כך ש-

$$Ass(Y)\cap K_{inf}=\emptyset$$

וזה יבטיח ש- $X\cup Y$ אינה ספיקה.

נגדיר: $Y=\{\neg p_i \mid i\in\mathbb{N}\}$

$Ass(Y)=\{v_F\}$ $v_F\notin K_{inf}$ ולכן $X\cup Y$ אינה ספיקה.

נשאר להוכיח: כל תת קבוצה סופית $E\subseteq X\cup Y$ ספיקה. תהי E כנ"ל.

$$E\cap Y=\{\neg p_{i_1},\neg p_{i_2},\dots,\neg p_{i_k}\}$$

יהי m האינדקס המקסימלי של פסוק מ-Y שמופיע ב-E

אם $E\cap Y=\phi$ (נגדיר $m=0$)

נגדיר השמה v באופן הבא:

$$v(p_i)=\begin{cases} F & i\le m \\ T & \text{אחרת} \end{cases}$$

$v\models E\cap Y$: יהי $\alpha\in E\cap Y$ אז $\alpha=\neg p_i$ עבור $i\le m$

ולכן $v\models\alpha$.

בנוסף $v\in K_{inf}$ ולכן $v\models X$ ובפרט $v\models E\cap X$

מסקנה: $v\models E$

זאת סתירה למשפט הקומפקטיות

הגדרה: יהי $2\le n\in\mathbb{N}$. השמה v נקראת n-מחלקת אם לכל $0<i\in\mathbb{N}$ $v\models p_{n\cdot i}$. לכל $n\ge2$, נסמן $K_n=\{v \mid v \text{ } n\text{-מחלקת}\}$

(א) הוכיחו/הפריכו: לכל $n\ge2$ K_n גדירה.

הטענה נכונה. נגדיר $\Sigma_n=\{p_{ni} \mid i>0\}$

$v\models\Sigma_n \Leftrightarrow$ לכל $i>0$ $v\models p_{ni} \Leftrightarrow$ n-מחלקת.

(ב) נגדיר $K=\bigcup_{n\ge2}K_n$

הוכיחו/הפריכו: $\bar{K}$ גדירה.

$$\bar{K}=\{v \mid v\notin K\}$$

ננסה להראות ש- $\bar{K}$ אינה גדירה.

נניח בשלילה שיש קבוצת פסוקים X ש- $Ass(X)=\bar{K}$

רעיון: Y ש- $X\cup Y$ לא ספיקה, אך כל תת סופית ספיקה

$$Ass(X\cup Y) = Ass(X)\cap Ass(Y) = \bar{K}\cap Ass(Y)$$

מפרט, נראה Y ש- $Ass(Y)\subseteq K$.

נבחר:

$$Y=\{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}$$

$Ass(Y)=\{v_T\}$. לכל n $v_T\in K_n$, לכן $v_T\in K$.

טענה: $X\cup Y$ אינה ספיקה.

נראה שכל $E\subseteq X\cup Y$ סופית היא כן ספיקה.

תהי $E\subseteq X\cup Y$ סופית.

נסמן m את האינדקס המקסימלי של פסוק מ- Y שמופיע ב-E.

נמצא השמה v כך ש- $v\models E\cap Y$, $v\models E\cap X$

$$v(p_i)=\begin{cases} T & i\le m \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

יהי $\alpha\in E\cap Y$: אז $\alpha=p_i$ עבור $i\le m$ ולכן מהגדרת v, $v\models\alpha$. כלומר $v\models E\cap Y$.

נראה ש- $v\models X$: מהנחת השלילה, זה שקול להוכחה ש- $v\in\bar{K}$ כלומר, $v\notin K$, כלומר לכל n $v\notin K_n$.

יהי n. קיים i גדול דיין כך ש- $n'>m$ ואז $v\not\models p_{n'}$

לכן $v\notin K_n$.

$\Leftarrow$ $v\models E\cap X$ ולכן $v\models E$ $\Leftarrow$ סתירה למשפט הקומפקטיות.