23.11

לוגיקה תרגול 4

מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

הערה: (נעבוד בפסוקים שבנויים מהקשרים $\{\neg, \to\}$ בלבד (שהראינו שזה מספק)

נגדיר את מערכת ההוכחה HPC.

האקסיומות:

(A1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ $\quad (= \{\alpha \to (\beta \to \alpha) \mid \alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \to\}}\})$

(A2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

(A3) $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

כללי היסק: MP (Modus Ponens)
$$\frac{\alpha, \ \alpha \to \beta}{\beta}$$

קבוצת הפסוקים היכיחים: מוגדרת באינדוקציה $X_{\text{אקסיומות}, MP}$

אם α יכיח נסמן $\vdash_{HPC} \alpha$

דוגמאות: $\vdash_{HPC} p_0 \to (p_1 \to p_0)$

מהרצאה ראינו שלכל α $\quad \vdash_{HPC} \alpha \to \alpha$

הוכחה עם הנחות:

תהי $\Sigma \subseteq WFF_{\{\neg, \to\}}$. קבוצת הפסוקים היכיחים מתוך Σ היא הקבוצה: $X_{\Sigma \cup \text{אקס'}, MP}$

אם α יכיח מתוך Σ, נסמן $\Sigma \vdash_{HPC} \alpha$

דוגמא: נוכיח שלכל $\alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \to\}}$

$\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash_{HPC} \beta$

הוכחה:

1. $\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ (A1)
2. $\neg\alpha$ הנחה
3. $\neg\beta \to \neg\alpha$ MP(1,2)
4. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$ (A3) $\longrightarrow$ רצינו את β אז ניסינו להגיע ל $\alpha \to \beta$ כי יש לנו α הנחה.
5. $\alpha \to \beta$ MP(3,4)
6. α הנחה
7. β MP(5,6)

Scanned by CamScanner

עובדות בסיסיות:

1. אם $\alpha\in\Sigma$ אז $\Sigma\vdash_{HPC}\alpha$ (הוכחה של שורה 1 α)
2. (הוכחה בהוכחה קודמת) אם $\Sigma\vdash_{HPC}\alpha$ ו- $\Sigma\subseteq\Gamma$ אז $\Gamma\vdash_{HPC}\alpha$

(כי $\Sigma\vdash\alpha$ באותה הוכחה תתקיים גם - $\Gamma\vdash_{HPC}\alpha$)

3. אם $\Sigma\vdash_{HPC}\alpha$ ולכל $\beta\in\Sigma$ $\Gamma\vdash_{HPC}\beta$, אז $\Gamma\vdash_{HPC}\alpha$.
4. אם $\Gamma\vdash_{HPC}\alpha$, אז יש $\Sigma\subseteq\Gamma$ סופית ש- $\Sigma\vdash_{HPC}\alpha$.

(כי יש סדרת הוכחה סופית)

משפט הדדוקציה: $\Sigma\subseteq WFF_{\{\neg,\to\}}$ $\alpha,\beta\in WFF_{\{\neg,\to\}}$

$$\Sigma\vdash_{HPC}\alpha\to\beta \iff \Sigma\cup\{\alpha\}\vdash_{HPC}\beta$$

תרגיל: הוכיחו: $\vdash_{HPC}\alpha\to(\beta\to(\beta\to\alpha))$

הוכחה: נשתמש במשפט הדדוקציה

$$\vdash_{HPC}\alpha\to(\beta\to(\beta\to\alpha))$$
משפט הדדוקציה $\Updownarrow$
$$\{\alpha\}\vdash_{HPC}\beta\to(\beta\to\alpha)$$
משפט דדוק' $\Updownarrow$
$$\{\alpha,\beta\}\vdash_{HPC}\beta\to\alpha$$
דדוק' $\Updownarrow$
$$\{\alpha,\beta\}\vdash_{HPC}\alpha \longrightarrow$$ וזה בבירור נכון!

הגדרה: $\Sigma\subseteq WFF_{\{\neg,\to\}}$ תקרא **עקבית** אם קיים $\alpha\in WFF_{\{\neg,\to\}}$ כך ש- $\Sigma\nvdash_{HPC}\alpha$.

הגדרה שקולה: Σ עקבית אם **לא** קיים α כך ש- $\Sigma\vdash_{HPC}\alpha$ וגם $\Sigma\vdash_{HPC}\neg\alpha$.

משפט הנאותות! אם $\Sigma\vdash_{HPC}\alpha$ אז $\Sigma\models\alpha$.

(הוכחה באינדוקציה על קבוצת הפסוקים היכיחים - בגלל האקס' ונשמרת ב- MP)

מסקנה! אם $\Sigma\not\models\alpha$ אז $\Sigma\nvdash_{HPC}\alpha$

דוגמה! הוכיחו כי $\Sigma=\{p_i\to p_{i+1} \mid i\in\mathbb{N}\}$ עקבית.

הוכחה: ממסקנה, מספיק להראות שיש α כך ש- $\Sigma \not\models \alpha$

כלומר יש α והשמה V, כך ש- $V \models \Sigma$ ו- $V \not\models \alpha$

נבחר $\alpha = \neg(p_0 \to p_0)$ ו- $V = V_F$ (לכולם False)

$V \models \Sigma$, $V \not\models \alpha$ כי α סתירה ■

מסקנה: אם Σ ספיקה, אז Σ עקבית.

משפט השלמות: אם $\Sigma \models \alpha$ אז $\Sigma \vdash_{HPC} \alpha$.

מסקנה: אם Σ עקבית, אז Σ ספיקה.

סיכום:

תחביר	סמנטיקה
$\Sigma \vdash_{HPC} \alpha$	$\Sigma \models \alpha$
Σ עקבית	Σ ספיקה

תרגיל: נגדיר סדרה של קבוצות פסוקים:

$$\Sigma_0 = \{\neg p_0\}$$

$$\Sigma_1 = \{p_0, \neg p_1\}$$

$$\Sigma_2 = \{p_0, p_1, \neg p_2\}$$

$$\vdots$$

$$\Sigma_i = \{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}, \neg p_i\}$$

א. **הוכיחו/הפריכו:** לכל i, Σ_i עקבית.

פתרון: נוכיח ש- Σ_i עקבית. ממשפט הנאותות, מספיק להראות ש- Σ_i ספיקה. נגדיר את ההשמה הבאה:

$$V_i(p_k) = \begin{cases} T & k < i \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

$V_i \models \Sigma_i$ ולכן Σ_i עקבית.

ב. הוכיחו/הפריכו: $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ עקבית?

הטענה לא נכונה, בפרט $p_i, \neg p_i \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ ולכן $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i \vdash_{HPC} p_i, \neg p_i$,

לכן $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ אינה עקבית.

ד. דוגמה שבה לא עקבי חיתוך $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$?

$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i = \emptyset$ והקבוצה הריקה ספיקה (באופן ריק), לכן עקבית.

ה. תהי F משפחה לא ריקה של קבוצות עקביות. הוכיחו

$$\bigcap F = \bigcap_{\Sigma\in F} \Sigma$$ עקבית.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה שקיים α כך ש- $\bigcap F \vdash_{HPC} \alpha, \neg\alpha$

תהי $\Sigma \in F$. לכן $\bigcap F \subseteq \Sigma$ ולכן $\Sigma \vdash_{HPC} \alpha, \neg\alpha$ סתירה להנחה,

שכל $\Sigma_i \in F$ עקבית.