16/11/16

תרגול 2 - בן זי:

תזכורת: טבלת האמת המלאה

טבלת אמת של פסוק α שמכיל את הפסוקים האטומיים $p_0,\dots,p_n$ זו טבלה עם 2^{n+1} שורות כך שכל שורה מתאימה להשמה ל- $p_0,\dots,p_n$, והעמודה האחרונה בטבלה מכילה את הערך של α תחת ההשמה שמתאימה לשורה.

לדוגמה:

p_0	p_1	$p_0 \vee p_1$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

① האם הפונקציה חח"ע? לא, אפשר למשל להחליף בין p_0 ל- p_1

② " " על? כן!

הגדרה: קבוצת קשרים X תקרא **שלמה**, אם לכל טבלת אמת T קיים פסוק α שבנוי אך ורק בעזרת הקשרים מ- X, שטבלת האמת שלו T. בהרצאה ראיתם $\{\vee,\wedge,\neg\}$ שלמה

[ברור שאם נוסיף קשרים זה עדיין יהיה שלם]

$\{\wedge,\neg\}$ שלמה. NAND שלמה.

$\{\vee,\neg\}$ שלמה

איך מוכיחים ששלמה? [מוכיחים באינדוקציה שכל ביטוי בקבוצה שלמה אחת אפשר באחרת]

מה לגבי $\{\vee,\wedge\}$? [לא קבוצה שלמה של קשרים. איך מוכיחים שלא שלמה? מוצאים טבלה שלא ניתן לייצר.]

טענה: $\{\vee,\wedge\}$ אינה קבוצת קשרים שלמה.

הוכחה: נסמן $WFF_{\{\wedge,\vee\}}$ את קבוצת הפסוקים שניתן לבנות בעזרת $\{\vee,\wedge\}$. נוכיח באינדוקציה על $WFF_{\{\wedge,\vee\}}$ שלכל $\alpha\in WFF_{\{\wedge,\vee\}}$ מתקיים $\overline{V_T}(\alpha)=T$

מכאן נובע שאין בקבוצה $WFF_{\{\wedge,\vee\}}$ פסוק שזו טבלת האמת שלו: [נוכיח את הטענה הזו באינדוקציה]

p_0	α
T	F
F	T

בסיס: $\alpha=p_i$ עבור $i\in\mathbb{N}$ $\overline{V_T}(p_i)=V_T(p_i)=T$

הגדרת השמה עוקבת   מהגדרת V_T

צעד: יהיו α, β כך ש- $\bar V_T(\alpha)=\bar V_T(\beta)=T$ (לפי הנחת האינדוקציה)

נרצה להראות שהתנאי נשמר תחת $op\in\{\wedge,\vee\}$.

$$\bar V_T(\alpha\wedge\beta)=TT_\wedge(\bar V_T(\alpha),\bar V_T(\beta))=TT_\wedge(T,T)=T$$

באותו אופן לגבי $\vee$.

(השמה V_T – T לכל p_i הפסוקים האטומיים)

הגדרה: יהי $\alpha\in WFF$. נאמר ש-α <u>ספיקה</u> אם יש השמה V כך ש- $\bar V(\alpha)=T$. מסמנים גם $V\models\alpha$.

הגדרה: α נקראת <u>טאוטולוגיה</u> אם לכל השמה V, $V\models\alpha$.
(מסמנים: $\models\alpha$)

דוגמאות: $p_0\to p_0$, $p_0\vee\neg p_0$

הגדרה: α נקראת <u>סתירה</u> אם לכל השמה V, $\bar V(\alpha)=F$ ($V\not\models\alpha$)
(מסמנים $\not\models\alpha$)

שימו לב ש- ההפך מסתירה הוא <u>ספיק</u> (<u>לא</u> טאוטולוגיה)!

פסוק: $\neg(p_0\to p_0)$, $p_0\wedge\neg p_0$

$p_0\to\neg p_0$ זה לא סתירה! כי השמה ש- $p_0=F$ מספקת אותו.

תרגיל:
הוכיחו: α סתירה $\Leftrightarrow$ $\neg\alpha$ טאוטולוגיה.

פתרון:
α סתירה $\Leftrightarrow$ לכל השמה V $\bar V(\alpha)=F$

$\Leftrightarrow$ לכל השמה V: $\bar V(\neg\alpha)=TT_\neg(\bar V(\alpha))=T$ (זה אומר בדיוק הביטוי השני שלנו)

$\Leftrightarrow$ $\neg\alpha$ טאוטולוגיה.

תרגיל: הוכיחו/הפריכו: אם $\alpha\vee\beta$ טאוטולוגיה, אז α טאוטולוגיה או β טאוטולוגיה.

פתרון:
הטענה אינה נכונה. ~~דוגמה נגדית:~~ $\alpha=p_0$ $\beta=\neg p_0$

$\alpha=p_0\vee\neg p_0$ טאוטולוגיה.

α אינו טאוטולוגיה ($V_F\not\models\alpha$)

β אינו טאוטולוגיה (כי למשל $V_T\not\models\beta$)

תרגיל: הוכיחו/הפריכו: אם $\alpha\vee\beta$ סתירה, אז α סתירה, וגם β סתירה.

פתרון: נכון. נניח בשלילה ובה"כ ש-α אינה סתירה. אז תהי β השמה כך ש- $\bar V(\alpha)=T$.

$$\bar V(\alpha\vee\beta)=TT_\vee(\bar V(\alpha),\bar V(\beta))=TT_\vee(T,\bar V(\beta))$$

הטבלה אומרת OR מספיק שאחד T.

ובצורת סתירה לנוסחה ש- $\alpha \vee \beta$ סתירה.

<u>הגדרה:</u> $\alpha,\beta \in WFF$, נאמר ש- α גורר לוגית את β ונסמן

$\alpha \models \beta$, (בשני הצדדים יש פסוק הפלט)

אם לכל השמה V כך ש- $V \models \alpha$ מתקיים גם ש-

$V \models \beta$. <u>דוגמא:</u> $p_0 \models p_0 \vee p_1$

<u>טענות:</u>

1. אם α טאוטולוגיה ו- $\alpha \models \beta$ אז β טאוטולוגיה.
2. אם β סתירה ו- $\alpha \models \beta$ אז α ספיקה.
(כי אם V מספקת את α היא צריכה לספק את β - סתירה!)
3. אם α סתירה, אז לכל β $\alpha \models \beta$. [באופן ריק כי אין השמה V שמספקת את α]
4. אם β טאוטולוגיה, אז לכל α, $\alpha \models \beta$.
[כי אם V מספק את α בוודאי מספק את β - כי β מסופקת ע"י כל ההשמות]

<u>תרגיל:</u> <u>הוכיחו / הפריכו:</u>

לכל α,β,γ מתקיים: אם $\alpha \wedge \beta \models \gamma$ ו- α,β ספיקות

אז γ ספיק.

[לא נכון. מתפשים α ו- β ספיקים כך ש- $\alpha \wedge \beta$ סתירה ואז מתקיים $\gamma \models \alpha\wedge\beta$ באופן ריק]

<u>פתרון:</u>
הטענה לא נכונה, למשל נבחר: $\alpha = p_0$ $\beta = \neg p_0$ $\gamma = p_0 \wedge \neg p_0$

α,β ספיקים, $\alpha \wedge \beta \models \gamma$ ו- γ אינו ספיק.

<u>הגדרה:</u> $\alpha,\beta \in WFF$, אם לכל השמה V $\bar{V}(\alpha) = \bar{V}(\beta)$

נאמר ש- α ו- β שקולים ונסמן $\alpha \equiv \beta$.

<u>תזכורת:</u> $\alpha \equiv \beta \iff \alpha \models \beta$ וגם $\beta \models \alpha$.

<u>הגדרה:</u> תהי $\Sigma \subseteq WFF$ (סיגמה) ו- V השמה. נאמר ש- V מספקת את Σ,

ונסמן $V \models \Sigma$ אם לכל $\alpha \in \Sigma$ $V \models \alpha$. (הגדרה לקבוצת פסוקים)

Σ ספיקה אם יש V כך ש- $V \models \Sigma$.

<u>הוכיחו / הפריכו:</u> אם לכל $\alpha \in \Sigma$, α ספיק אז Σ ספיקה.

הטענה לא נכונה. דוגמא $\Sigma = \{p_0, \neg p_0\}$ מתקיים שכל אחד מהם לעצמו ספיק

[illegible] p_0 ו- $\neg p_0$ יחד [כקבוצה Σ לא ספיקה]

באופן דומה, מגדירים $\Sigma \models \alpha$. (כל v שמספקת את Σ מספקת גם α)

$$\Sigma_1 \models \Sigma_2$$

$$\Sigma_1 \equiv \Sigma_2 \quad (\Sigma_1 \models \Sigma_2 \text{ וגם } \Sigma_2 \models \Sigma_1)$$

<u>תרגיל:</u> תהי $\Sigma \subseteq WFF$ (קבוצה של פסוקים)

$$\Gamma_\Sigma = \{\beta \in \Sigma \mid \{\beta\} \models \Sigma \setminus \{\beta\}\}$$

גאמא גדולה

סיגמא

<u>דוג':</u> $\Sigma = \{p_0, p_1, p_0 \vee p_1, p_0 \wedge p_1\}$

$\Gamma_\Sigma = \{p_0 \wedge p_1\}$ (כי היא שקולה לוגית לכל יתר האיברים ב-Σ)

<u>הוכיחו או הפריכו</u>: אם $\Gamma_\Sigma \neq \emptyset$ אז $\Gamma_\Sigma \equiv \Sigma$.

הטענה נכונה

$[\Leftarrow]$ $\Sigma \models \Gamma_\Sigma$: ברור כי $\Gamma_\Sigma \subseteq \Sigma$

$[\Rightarrow]$ נשאר להוכיח: $\Gamma_\Sigma \models \Sigma$

יהי V השמה כך ש- $V \models \Gamma_\Sigma$, ויהי $\beta \in \Gamma_\Sigma$

בפרט $V \models \beta$ (מהגדרה). בנוסף $\{\beta\} \models \Sigma \setminus \{\beta\}$ (מהגדרת Γ_Σ)

לכן נקבל ש- $V \models \Sigma \setminus \{\beta\}$. לכן:

$$V \models (\Sigma \setminus \{\beta\}) \cup \{\beta\} = \Sigma$$