9.11

תרגול 2 - סינ'

WFF - well Formed - Formulas

הגדרה

$$U = \{ (,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, p_0, p_2, \dots \}^*$$

$B = \{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ פסוקים אטומיים

$$F = \{F_\neg, F_\wedge, F_\vee, F_\rightarrow, F_\leftrightarrow\}$$

$$F_\neg : U \rightarrow U$$

$$F_\neg(\alpha) = (\neg\alpha)$$

לכל $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

$$F_\circ : U^2 \rightarrow U$$

$$F_\circ(\alpha, \beta) = (\alpha \circ \beta)$$

$$WFF = X_{B,F}$$

דוגמאות:

$$p_5 \in WFF$$

$$(p_0 \rightarrow (\neg p_1)) \in WFF$$

$$(p_1 \rightarrow (p_7 \vee p_9)) \in WFF$$

אפשר להוכיח ע"י סדרת יצירה.

הערות:

1. $(p_0 \vee p_1) \neq (p_1 \vee p_0)$ (שונים)

2. כל הפסוקים ב- WFF הם באורך סופי

איך מוכיחים שנוסחה α איננה ב- WFF?

תשובה: כמו שראינו שיבור לא שייך ל- $X_{B,F}$ (מוצאים תכונה ש- $X_{B,F} \subseteq Y$ ו- $\alpha \notin Y$)

כמה תכונות של WFF: [הוכחנו בהרצאה]

1. יהי $\alpha \in WFF$, α מקיים את אחת מהתכונות הבאות:

א. $\alpha = p_i$ עבור $i \in \mathbb{N}$ (α פסוק אטומי)

ב. α מתחיל ב- (ומסתיים ב-)

מסקנה: $p_2) p_3 \notin WFF$

② יהי $\alpha \in WFF$ אז מספר הסוגריים השמאליים ב-α שווה למספר הסוגריים הימניים.

$$WFF \subseteq \{\alpha \mid \#_{(}(\alpha) = \#_{)}(\alpha)\}$$

<u>הגדרה:</u> תהיינה $\alpha, \beta \in U$. נאמר ש-β היא <u>רישא</u> של α (prefix)

אם:
$$\alpha = \alpha_1, \dots \alpha_n$$
$$\beta = \beta_1, \dots \beta_m$$

$m \le n$ וגם $\beta_i = \alpha_i$

<u>דוגמה:</u> מהן הרישות של $(p_0 \vee p_1)$?

ε ← המילה הריקה, $($, $(p_0$, $(p_0 \vee$, $(p_0 \vee p_1$, $(p_0 \vee p_1)$

(*) β רישא <u>ממש</u> של α אם β רישא של α וגם $\beta \ne \alpha$.

טענה ③ יהי $\alpha \in WFF$ ו-β רישא <u>ממש</u> לא ריקה של α

$$\#_{(}(\beta) > \#_{)}(\beta)$$

$$WFF \subseteq T := \{\alpha \in U \mid \text{לכל רישא ממש לא ריקה } \beta \text{ של } \alpha:\ \#_{(}(\beta) > \#_{)}(\beta)\}$$

אם ננסה להוכיח באינדוקציה נתקל בבעיה משום שלא כך

<u>בעיה:</u> T לא סגורה ל-$F_\neg$ כי למשל $) \in T$ (באופן ריק...)

$$F_\neg()) = (\neg)) \notin T$$

<u>פתרון:</u> כמו שלמדנו שצריך לחזק את הנחת האינדוקציה

נגדיר: $T' = \{\alpha \mid \alpha \in T \text{ וגם } \alpha \in WFF\}$

נוכיח באינדוקציה על WFF ש-$WFF \subseteq T'$

<u>בסיס:</u> $\alpha = p_i$ עבור $i \in \mathbb{N}$

α פסוק אטומי (מכי) $\alpha \in WFF$. אין ל-α רישא ממש לא ריקה ולכן $\alpha \in T$

$\Leftarrow$ $\alpha \in T'$.

<u>צעד:</u> תהיינה $\alpha, \beta \in T'$ רוצים להוכיח: $(\neg \alpha) \in T'$

$(\alpha \wedge \beta) \in T'$

$(\alpha \vee \beta) \in T'$

$(\alpha \circ \beta)$ מקרים דומים...

נכונות: $(\neg\alpha)\in T'$

$(\neg\alpha)\in WFF$ כי מהנחת האינדוקציה $\alpha\in WFF$ ו- WFF סגורה ל- $F_\neg$

$(\neg\alpha)\in T$: יהי γ רישא ממש לא ריקה של $(\neg\alpha)$

1. $\gamma=($, $\gamma=(\neg$) כי $\#_((\gamma)=1>0=\#_)(\gamma)$)

2. $\gamma=(\neg\alpha'$ כך ש- α' רישא ממש לא ריקה של α

$$\#_((\gamma)=1+\#_((\alpha')\underset{\uparrow}{>}\#_)(\alpha')=\#_)(\gamma)$$

לפי הנחת האינדוקציה

3. $\gamma=(\neg\alpha$

$$\#_((\gamma)=1+\#_((\alpha)=1+\#_)(\alpha)>\#_)(\alpha)=\#_)(\gamma)$$

$\alpha\in WFF$ לכן מס' (= מס')

- באופן דומה מוכיחים עבור $(\alpha\circ\beta)$ כש- $\circ\in\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$

<u>משפט הקריאה היחידה:</u>

לכל $\varphi\in WFF$ מתקיים <u>בדיוק</u> אחד משלושת התנאים הבאים:

1. $\varphi=p_i$ עבור $i\in\mathbb{N}$
2. קיים $\alpha\in WFF$ יחיד, $\varphi\in(\neg\alpha)$
3. קיימים $\gamma,\delta\in WFF$ יחידים, $\varphi=(\gamma\circ\delta)$
   $\circ\in\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$

(הוא רשום $\varphi=(\alpha\circ\beta)$ הקשר הראשי שלה)

<u>הסמנטיקה של תחשיב הפסוקים:</u>

הערה: מעתה נשמיט סוגריים מהרגע כשאין סכנה לבלבול.

$\neg p_0$

<u>הגדרה:</u> השמה היא פונקציה $V:\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}\to\{F,T\}$

<u>דוגמאות:</u> ההשמה V_F מוגדרת ע"י $\forall i\quad V_F(p_i)=F$

V_T מוגדרת ע"י $\forall i\quad V_T(p_i)=T$

יהי V השמה, <u>השמה מורחבת</u> היא פונקציה $\bar{V}:WFF\to\{F,T\}$

שמוגדרת באינדוקציה: <u>בסיס:</u> $\bar{V}(p_i)=V(p_i)$.

<u>צעד:</u> אם $\alpha=(\neg\beta)$

$$\bar{V}(\alpha)=TT_\neg(\bar{V}(\beta))$$

a	$TT_\neg$
F	T
T	F

* אם $\alpha=(\beta\wedge\gamma)$ $\qquad \bar{V}(\alpha)=TT_{\wedge}(\bar{V}(\beta),\bar{V}(\gamma))$

⋮

וככה הלאה

* $\alpha=(a\to b)$

a	b	$TT_{\to}$
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

(3*) ההשמה המורחבת מוגדרת היטב לפי משפט הקריאה היחידה.

<u>דוגמה:</u> לפי V ההשמה הבאה:

$$V(p_i)=\begin{cases}F & i=1\\ T & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$\alpha=p_0\to(\neg p_1)$$

נחשב את $\bar{V}(\alpha)$

$$\bar{V}(\alpha)=TT_{\to}(\bar{V}(p_0),\bar{V}(\neg p_1))$$
$$=TT_{\to}(V(p_0),TT_{\neg}(\bar{V}(p_1)))$$
$$\bar{V}(p_1)\text{ ''}$$
$$=TT_{\to}(T,TT_{\neg}(F))=$$
$$=TT_{\to}(T,T)=T$$

משפט: יהי $\alpha\in WFF$ ו- V_1,V_2 השמות. אם <u>לכל</u> p_i שמופיע ב- α מתקיים ש- $V_1(p_i)=V_2(p_i)$, אז $\bar{V}_1(\alpha)=\bar{V}_2(\alpha)$.