25.1

תרגול אחרון לוגיקה

<u>תרגיל:</u> הוכיחו/הפריכו: קיים אלגוריתם A שבהינתן פסוק φ מחזיר פסוק ψ כך ש- ψ תקף $\iff$ φ ספיק

<u>פתרון:</u>
נראה שלו היה כזה אלגוריתם A, היה גם אלגוריתם B שמאפשר להכריע האם φ ספיק.

<u>תזכורת:</u> יש לנו "חצי אלגוריתם" H שבהינתן α, אם α אינה ספיקה H עוצר ומכריז "α אינה ספיקה"
(עושים סקולמיזציה, מחפשים תת קבוצה סופית לא ספיקה של GrIns)

B יפעל באופן הבא: בהינתן φ נריץ את A ונקבל $\psi=A(\varphi)$

<u>ואז נריץ את:</u> $H(\varphi)$, $H(\neg\psi)$ "במקביל".

אם $H(\varphi)$ עוצר ומכריז "φ לא ספיק" נגיד φ לא ספיק.

אם $H(\neg\psi)$ עוצר ומכריז "$\neg\psi$ לא ספיק" נכריז "φ ספיק" ונעצור.

<u>נכונות ועצירה:</u>

אם φ אינה ספיקה $H(\varphi)$ יגלה זאת ויעצור בזמן סופי. במקרה זה $H(\neg\psi)$ אינו עוצר ולכן B יעצור ויאמר ש- φ אינה ספיקה.

אם φ ספיקה מההנחה על A, ψ תקפה ולכן $\neg\psi$ אינה ספיקה. $H(\neg\psi)$ יעצור ויגלה זאת, $H(\varphi)$ לא עוצר ולכן B יעצור ויאמר ש- φ ספיקה.

<u>הגדרה:</u> יהי σ מילון ו- M מבנה עבור σ.
נאמר שיחס $\Delta \subseteq (D^M)^n$ גדיר ב- M אם קיימת נוסחה α עם n משתנים חופשיים $x_1, \dots, x_n$ כך שלכל השמה v. $M,v \models \alpha \iff (v(x_1),\dots v(x_n)) \in \Delta$

<u>דוגמה:</u> $\sigma = (R(\cdot,\cdot), =)$ $\quad M = (\mathbb{N}, \underset{R(\cdot,\cdot)}{\leq}, =)$

הוכיחו שהיחס הבא גדיר ב- M:

$$\Delta_1 = \{(m,n) \mid m \leq n \quad m,n \in \mathbb{N}\}$$

$$\alpha_1 = R(x,y)$$

ב. הוכיחו שהיחס הבא גדיר ב- M:

$$\Lambda_2 = \{(m,n) \mid m<n,\ m,n \in \mathbb{N}\}$$

$$\alpha_2 = R(x,y) \wedge (\neg(x=y))$$

תרגיל:

$$\sigma = (f(\cdot,\cdot), =, c)$$

$$M = (\mathbb{N}^+, \overset{\text{כפל}}{\times}, =, 1)$$

הוכיחו שהיחסים הבאים גדירים ב- M.

(א)

$$\Lambda_1 = \{(m,n) \mid m \text{ מחלק את } n\}$$

$$\alpha_1 = \exists z\ f(x,z)=y$$

(ב)

$$\Lambda_2 = \{p \mid p \text{ ראשוני}\}$$

$$\alpha_2 = \forall y\ ((\underset{\substack{\text{סימון} \\ \text{קבוע} \\ \text{שמציין את } 1}}{y \neq c}) \wedge (y \neq x)) \rightarrow \neg\alpha_1(y,x)$$

$\wedge (x \neq c)$

(אפשר גם להגדיר שאין מחלקים + ששונה מ-1)

ג. $n \in \mathbb{N}^+$ יקרא חופשי מרבועים אם בפירוק של n לגורמים הראשוניים $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ $e_i \leq 1$ לכל i (כלומר אין גורם ריבועי (מורכב))

(אפשר לכל y y·y לא מחלק את המספר)

$$\Lambda_3 = \{m \mid m \text{ חופשי מריבועים}\}$$

$$\alpha_3 = \forall w\ (\alpha_2(w) \rightarrow \neg\alpha_1(f(w,w),x))$$

תרגיל: (ב) $\sigma_1 = (R_1(\cdot), R_2(\cdot), R_3(\cdot), c_1, c_2)$

הוכיחו/הפריכו: קיימת נוסחה סגורה וספיקה α מעל σ_1 שספיקה רק במבנים בגודל ≥ 10. (הטענה שגויה)

הטענה לא נכונה! ממשפט המבנה הקטן, אם α ספיקה אז יש לה מבנה בגודל $\leq 2^3 = 8 < 10$

(כי יש 3 יחסים ואפשר להיות במס-1 או לא-0)

ב. $G_2=(R(\cdot,\cdot),c)$ הוכיחו/הפריכו: יש נוסחה α סגורה וספיקה, שספיקה רק במבנים סופיים.

נוסיף סימן פונקציה $f(\cdot)$ למילון.

נניח שיש α כזו. נבנה את $SK(\alpha)$. כיוון ש-α ספיקה, $SK(\alpha)$ ספיקה במבנה הרברנד. עכשיו העולם של מבנה הרברנד אינסופי. נבנה מבנה ל-G_2 שבו "נשכח" את פירוש הסימנים שהוספנו מסקולמיזציה וכמו בהוכחה ממשפט סקולם המבנה הזה מספק את α והעולם הוא אינסופי.

ג. הוכיחו/הפריכו יש נוסחה α סגורה וספיקה שמסתפקת רק במבנים סופיים? כן, $\forall x(x=c)$

(α_n?), רק אינסופיים? כן, אפשר למשל לכתוב פסוק שאומר ש-R^M פונקציה חח"ע שאינה על, או ש-R^M יחס סדר מלא ללא איבר מקסימלי.

<u>תרגיל:</u> תהי $\Gamma\cup\{\varphi\}$ קבוצה של נוסחאות. נניח ש-$\Gamma \models^{v} \varphi$

<u>הוכיחו/הפריכו:</u> א. קיימת תת קבוצה סופית Γ' ש-$\Gamma' \models^{v} \varphi$

<u>הוכחה:</u> אם $\Gamma \models^{v} \varphi$ אז ממשפט השלמות $\Gamma \vdash_{HC} \varphi$

אז יש $\Gamma' \subseteq \Gamma$ סופית $\Gamma' \vdash_{HC} \varphi$. ממשפט הנאותות $\Gamma' \models^{v} \varphi$

כי סדרת ההוכחה היא סופית

(ב) קיימת $\Gamma' \subseteq \Gamma$ סופית כך ש- $\Gamma' \models^{t} \varphi$.

<u>נפריך, דוג' נגדית:</u>

$\Gamma=\{R(x)\}$

$\varphi=R(f(x))$

<u>צריך להראות:</u> ① $\Gamma \models^{v} \varphi$ (אפשר להראות ישירות או לפי הוכחה ב-HC)

② יש 2 תתי קבוצות של Γ

$\Gamma \not\models^{t} \varphi$

$\emptyset \not\models^{t} \varphi$

לכן אין תת קבוצה $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ש- $\Gamma' \models \varphi$