18.1.17 **תרגול 12**

משחקי Ehrenfeucht-Fraïssé

משחק EF הוא משחק בין שני שחקנים: Spoiler ו-Duplicator
בלבלן סדקן

לוח המשחק הוא זוג מבנים (M,N) מעל σ.

המשחק מתנהל ב-K תורות.

בתור ה-i:

- S בוחר איבר $a_i \in D^M$ או $b_i \in D^N$
- D בוחר איבר במבנה השני.

המטרה של D היא שהמיפוי $a_i \mapsto b_i$ יהיה איזו' חלקי בין M ל-N.

אם D יכול לנצח אחרי K תורות נאמר שיש ל-D אסטרטגיה מנצחת למשחקי EF באורך K.

משפט

יהי φ פסוק מ quantifier rank (עומק קינון כמתים) K
אם ל-D יש אסטרטגיה מנצחת באורך K על (M,N)
אז $M \models \varphi \iff N \models \varphi$.

מסקנה

תהי P תכונה של מבנים מעל σ. אם קיימות שתי משפחות $\{M_k\}$ ו-$\{N_k\}$ (סופיים) כך שלכל K: ① $M_k \in P$, $N_k \notin P$.
② ל-D יש אסטרטגיה מנצחת באורך k על (M_k, N_k)

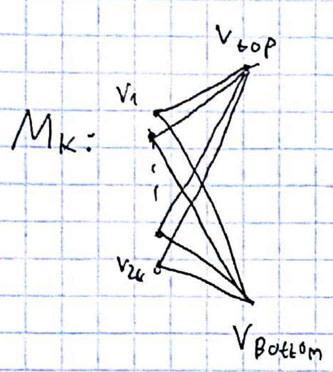
אזי P אינה גדירה:
אין פסוק φ כך ש- $M \models \varphi \iff M \in P$.
(לכל M סופי)

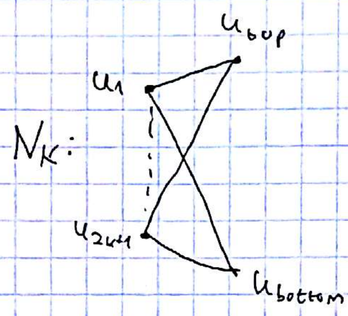
<u>דוגמה</u> $\sigma = (E(\cdot,\cdot), =)$ נחשוב על מבנים עבור σ בתור גרפים.

אז אין פסוק φ כך שלכל סופי M $\quad M \models \varphi \iff$ M לא מכוון פשוט ויש בו מעגל אוילר.

(משפט אוילר: יהי G גרף קשיר. אז ב-G יש מעגל אוילר אמ"מ לכל קודקוד v, $deg(v)$ זוגית.)

נבנה M_K, N_K כדרוש.





ברור שב-M_K יש מעגל אוילר.
וב-N_K אין מעגל אוילר.

האסט' של D:

בשלב ה-i:

* אם I בחר $a_i = a_j$ עבור $j<i$ נבחר $b_i = b_j$
  ״ ״ ״ $b_i = b_j$ ״ ״ ״ $a_i = a_j$
* אם I בחר V_{top} נבחר U_{top} והפסק.
  I בחר V_{Bottom} נבחר U_{Bottom} והפסק.
* אם I בחר $a_i \in \{v_1..v_{2k}\}$ שלא נבחר קודם, נבחר $b_i \in \{u_1..u_{2k+1}\}$ שלא נבחר קודם (והפסק)

(תמיד אפשר לעשות זה במשחק באורך K)

<u>טענה:</u> זו אסטרטגיה מנצחת באורך K.

<u>הוכחה</u> תהי f פונק' כך ש- $f(V_{top}) = U_{top}$, $f(V_{Bottom}) = U_{Bottom}$

ויהי $A \subseteq \{v_1..v_{2k}\}$ כך ש- $|A| \leq K$, f חח"ע על A ו- $f(A) \subseteq \{u_1..u_{2k+1}\}$

אז $f: A \cup \{V_{top}, U_{top}\} \to Im(f)$ איזו' חלקי.

כי אסטרטגיה מגדירה כזו f. $\square$

משפט טרכטנברוט

אין אלגוריתם לבעיה: בהינתן פסוק φ,
להכריע האם קיים מבנה סופי שמספק את φ.

(האם יש מבנה בגודל לכל היותר $\geq k$ שמספק, אז בעיה זו כריעה באופן טריוויאלי)
(אם ~~ה~~ במילון יש רק סימני יחס חד מקומיים אז זה גם כריע)

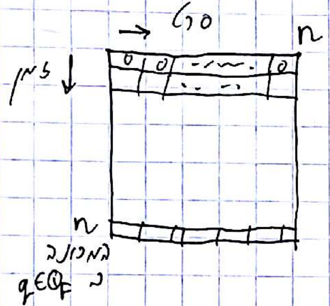
נראה רדוקציה מהשפה $L=\{T \mid$ מ"ט שעוצרת על הקלט הריק $T\} = H_{TM_\varepsilon}$

כלומר נראה איך בהינתן T כמו פסוק φ_T כך ש:
יש ל φ_T מודל סופי $\Leftarrow\Rightarrow$ T עוצרת על הקלט הריק.

$$T=(Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, Q_F)$$

Q – קב' מצבים סופית, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Delta = \{0,1\}$, δ – פ' מעברים, Q_F – מצבים סופיים (מקבלים/דוחים)

נבנה את φ כך שמודל סופי של φ_T
יתאים לטבלת חישוב תקינה (וסופית).



נבחר במילון σ הבא:

$$\sigma = (R_<(\cdot,\cdot), C_{min}, Succ(\cdot,\cdot), T_0(\cdot,\cdot), T_1(\cdot,\cdot), \{H_q(\cdot,\cdot)\}_{q\in Q})$$

C_{min} – האיבר המינימלי ביחס ל $R_<$
$Succ$ – יחס העוקב ביחס ל $R_<$
$T_0(x,y)$ יגיד שבזמן x (בתא y) כתוב 0
$H_q(x,y)$ הראש בזמן x נמצא ב y והמכונה במצב q

φ_T יהיה $\wedge$ של הפסוקים הבאים:

- פסוק שאומר ש $R_<$ יחס סדר מלא ו C_{min} האיבר המינימלי:

$$\forall x \forall y \forall z\ ((R_<(x,y) \wedge R_<(y,z)) \to R_<(x,z)) \wedge \dots \forall x R_<(C_{min},x)$$

- פסוק שאומר ש $Succ$ זה יחס העוקב המיידי ביחס ל $R_<$:

$$\forall x \forall y (Succ(x,y) \leftrightarrow (R_<(x,y) \wedge \forall z (z\neq y \wedge R(x,z) \to R_<(y,z))))$$

- פסוק שאומר בכל תא יש 0 או 1 אך לא שניהם

$$\forall p \forall t \left((T_0(p,t) \vee T_1(p,t)) \wedge (T_0(p,t) \leftrightarrow \neg T_1(p,t)) \right)$$

- פסוקים שאומרים שבכל זמן קיים מקום יחיד לראש הקורא ומצב יחיד למכונה:

$$\forall t \exists p \left(\left(\bigvee_{q \in Q} H_q(p,t) \right) \wedge \left(\bigwedge_{q \neq q'} \neg (H_q(p,t) \wedge H_{q'}(p,t)) \right) \right)$$

קידוד לקיים ויחיד $\forall p', p \neq p' \ldots$

- פסוק שאומר שהמכונה מתחילה את הריצה עם סרט ריק ובמצב q_0 והראש הקורא בצד שמאל

$$H_{q_0}(c_{min}, c_{min}) \wedge \forall p \left(T_0(p, c_{min}) \right)$$

- פסוק שאומר שהמכונה מגיעה למצב מקבל

$$\exists p \exists t \bigvee_{q \in Q_F} H_q(p,t)$$

- לכל מעבר כ״ל פסוק שמתאר שהמעבר של T מתבצע בהתאם.

דוגמה: נניח במצב q וקוראים 0, ושאומרים שבמעבר זה עוברים ל-q' כותבים 1 ומזיזים ראש קורא ימינה.

$$\forall p \forall t \left(H_q(p,t) \wedge T_0(p,t) \right) \rightarrow \left(H_{q'}(p+1, t+1) \wedge T_1(p, t+1) \right)$$

להשתמש ביחס $succ(\cdot,\cdot)$

יש ל-C_T מודל סופי $\Longleftrightarrow$ T עוצרת על הקלט הריק.

∎