11.1.17

<u>תרגול שבוע 11</u>

תהי Σ קבוצת פסוקים (נוסחאות סגורות) [נכון גם לא לפסוקים]

אז Σ ספיקה $\Longleftrightarrow$ כל תת קבוצה סופית של Σ ספיקה

<u>משפט רמזי:</u> לכל $k\in\mathbb{N}$ קיים $n_0=n_0(k)$, כך שלכל $n\geq n_0$

לכל צביעה של צלעות הגרף המלא K_n ב-2 צבעים (אדום וכחול)

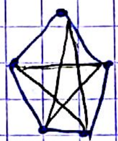
יש קבוצה מונוכרומטית בגודל k (קבוצה בגודל k שכל הצלעות בקודקודיה באותו צבע)

ה-n_0 המינימלי שעבורו זה מתקיים מסומן $R(k)$

<u>דוגמ:</u>

$R(3)=6$ - זה המינימלי - לפי שובך יונים ב-6 יתקבל משולש אדום

לדוגמא צא- עבור 5 (קודקודים) (2 צבעים)



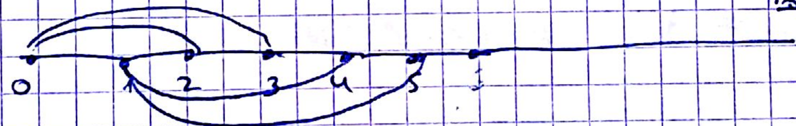
$R(4)=18$

[illegible] (לא ידוע)

<u>משפט רמזי האינסופי:</u> יהי G הגרף המלא על $\mathbb{N}$.

בכל צביעה של צלעות G באדום וכחול יש קבוצה מונוכרומטית אינסופית.

<u>רעיון ההוכחה:</u>



<u>הוכחה:</u>

נבנה באינדוקציה משפחה של קבוצות $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $A_i\subseteq\mathbb{N}$

וסדרת צבעים $\{C_i\}$ $\quad C_i\in\{R,B\}$ red blue

<u>כך ש:</u>

1. לכל i A_i אינסופית
2. לכל i, $A_{i+1}\subseteq A_i$
3. נסמן ב-m_i את האיבר המינימלי ב-A_i. אז $m_{i+1}>m_i$

הצביעה היא מונוכרומטית ל-ij:

A_0: נסמן קודקוד 0. אם יש לו אינסוף שכנים כחולים (הכוונה בצלעות) שאלים שכנו, נבחר את A_0 להיות קבוצת השכנים הכחולים האלו (כלל C_0)

ו-$C_0=B$.

Scanned by CamScanner

אחרת, יש לו אינסוף שכנים אדומים, A_0 מהם קבוצת האדומים,
$c_0=R$.

נניח שהגדרנו את A_i, נגדיר את A_{i+1}:

נביט באיבר השני הכי קטן ב-A_i, a

כיוון ש-A_i אינסופית (הנחת האינדוקציה) יש לו אינסוף שכנים
כחולים שכנים לו ב-A_i או אדומים.

אם כחולים, A_{i+1} תהיה קבוצת השכנים הכחולים של a הגדולים
ממנו ב-A_i (כמו a) ו-! $c_{i+1}=B$ אחרת, ...

התכונות 1-3 נשמרות באינדוקציה (ברור ✓)

נביט בסדרה $\{c_i\}$. נניח בה"כ ש-B מופיע אינסוף פעמים
בסדרה. <u>טענה:</u> $\{m_i \mid c_i=B\}$ קבוצה מונוכרומטית אינסופית
כחולה. <u>הוכחה:</u> ברור. ∎

- נביט במילון שבו שני סימני יחס דו-מקומיים $R(\cdot,\cdot), B(\cdot,\cdot)$
וסימן שוויון.

נדרוש ש-R,B הם צביעה של הגרף המלא
איברי העולם ב-2 צבעים

בלי לולאות עצמיות $$\varphi_1 = \forall x(\neg R(x,x) \wedge \neg B(x,x))$$

סימטריים $$\varphi_2 = \forall x \forall y\,(x \neq y \rightarrow (R(x,y) \rightarrow R(y,x) \wedge (B(x,y) \rightarrow B(y,x))))$$

כל צלע תהיה צבועה $$\varphi_3 = \forall x \forall y\,(x \neq y \rightarrow (R(x,y) \vee B(x,y)))$$

כל צלע תהיה צבועה בצבע אחד $$\varphi_4 = \forall x \forall y\,(\neg R(x,y) \wedge B(x,y)))$$

נכתוב פסוק α_n שאומר שיש לפחות n איברים
בעולם:

$$\alpha_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right)$$

נכתוב פסוק χ_k שאומר שאין קבוצה מונוכרומטית בגודל
k:

$$\chi_K = \forall x_1 \dots \forall x_k \left(\left(\bigwedge_{1\le i<j\le k} x_i \ne x_j \right) \to \left(\bigvee_{1\le i<j\le k} B(x_i, x_j) \wedge R(x_l, x_m) \right) \right) \qquad 1 \le l \le m \le k$$

(בכל קבוצה בגודל k יש זוג שמן צלע אדום ובין כל קבוצה של מכילה k לא ... כחולה)

נניח שמשפט רמזי הסופי אינו נכון. אז קיים k וסדרה אינסופית $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ כך שניתן לצבוע את K_{n_i} ללא קבוצה מונוכרומטית בגודל k.

נגדיר את הקבוצה

$$\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \chi_k\} \cup \{\alpha_n \mid n \ge 1\}$$

תהי $\Gamma \subseteq \Sigma$ סופית. מספר יש n מקסימלי כך ש- $\alpha_n \in \Gamma$. מהנחת השלילה יש $n_i \ge n$ וצביעה של K_{n_i} ללא קבוצה מונוכרומטית בגודל k. וזה בדיוק מודל של Γ.

מסקנה: Σ ספיקה (ממשפט הקומפקטיות)

ממשפט LS (ק) (UP), יש ל- Σ מודל בן מניה (כי כל מודל חייב להיות אינסופי)

וזו סתירה למשפט רמזי האינסופי.

תרגיל: הגדרה: יהי φ פסוק. הספקטרום של φ היא הקבוצה

$$spec(\varphi) = \{ n \in \mathbb{N} \mid \text{קיים } M \text{ כך ש- } M \models \varphi \text{ ו- } |D^M| = n \}$$

דוגמה: $spec(\alpha_n) = \{m \mid m \ge n\}$ (מבנים עם פחות מ-n איברים בתחום לא יספקו את α_n)

תרגיל: (א) מצאו פסוק φ כך ש- $spec(\varphi)$ היא קבוצת המספרים הזוגיים (החיוביים). ניתן לבחור את המילון כרצונכם.

פתרון: ניקח מילון שבו סימן פונקציה $f(\cdot)$, סימן יחס $R(\cdot)$, וסימן שוויון.

נדרוש $f^M : R^M \to (R^M)^c$ חח"ע ועל.

(אנחנו נגדיר בלבד בגלל ש- R^M)

ממשפט כי x לא ... $\varphi_1 = \forall x (R(x) \to \neg R(f(x)))$

f חח"ע מ- R^M $\varphi_2 = \forall x \forall y ((R(x) \wedge R(y) \wedge x \ne y) \to (f(x) \ne f(y)))$

f על $\overline{R^M}$ $\varphi_3 = \forall x ((\neg R(x)) \to \exists y (R(y) \wedge f(y) = x))$

$f : R^M \to \overline{R^M}$ מתאים $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$

Scanned by CamScanner

ⓑ הוכיחו שאין כזה פסוק φ מעל מילון בעל סימן שוויון בלבד.

<u>הגדרה:</u> יהי σ מילון ו- M,N מבנים מעל σ.

איזומורפיזם בין M ל- N היא פונקציה:

$$T: D^M \to D^N$$

חח"ע ועל כך ש-

- לכל סימן קבוע c במילון: $T(c^M) = c^N$
- לכל סימן יחס R ו- $a_1,...,a_n \in D^M$

$$(a_1,...,a_n)\in R^M \iff (T(a_1), T(a_2), ..., T(a_n)) \in R^N$$

- לכל סימן פונקציה f ו- $a_1,...,a_n \in D^M$

$$T(f^M(a_1,...,a_n)) = f^N(T(a_1),...,T(a_n))$$

<u>בתרגיל הבית:</u> הוכחנו ש- איזומורפיזם זה יחס שקילות, ואם M ו- N איזו' אז הם מספקים בדיוק אותם פסוקים.

<u>הוכחה ל-ⓑ:</u> נניח בשלילה שיש כזה φ:

$$\Sigma_1 = \{\varphi\} \cup \{\alpha_n \mid n\in\mathbb{N}\} \qquad \Sigma_2 = \{\neg\varphi\} \cup \{\alpha_n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

⊛ α_n מהתרגיל הקודם Σ_1, Σ_2 מעל מילון עם סימן שוויון בלבד.

ממשפט הקומפקטיות, Σ_1 ו- Σ_2 (כי קל לראות שכל תת קבוצה סופית ספיקה) אזי יש מודל M ל- Σ_1 ו- N ל- Σ_2

וממשפט LS ניתן להניח ש- M ו- N בני מניה.

עכשיו, M ו- N איזומורפיים מעל מילון עם סימן שוויון בלבד.

אבל $M \models \varphi$ ו- $N \models \neg\varphi$. סתירה!

■