4.1.17

<u>תרגול שבוע 10</u>

<u>תרגיל:</u> יהי σ מילון ו- $\Gamma\cup\{\varphi\}$ קב' פסוקים, מעל σ.

נתון כי $\Gamma \models \forall x\exists y\, \psi(x,y)$

(נגדיר מילון חדש τ ע"י הוספה של סימן פונקציה חד מקומי f ל-σ.)

<u>הוכיחו:</u> אם $\Gamma\cup\{\forall x\psi(x,f(x))\} \models \varphi$ אז $\Gamma \models \varphi$.

<u>הוכחה:</u> יהי M מבנה (מעל σ) כך ש- $M \models \Gamma$

נרצה להראות: $M \models \varphi$.

מהנתון, $M \models \forall x\exists y\,\psi(x,y)$

כלומר, לכל השמה v, לכל $a\in D^M$ קיים $b=b(a)\in D^M$ כך

ש- $M,v[a/x, b/y] \models \psi$ (*)

(הערה - f לא מוגדר מעל σ)

נגדיר מבנה M' מעל τ באופן הבא: $D^{M'} = D^M$

כל הסימנים ב-σ מתפרשים כמו ב-M.

$f^{M'}$ מוגדרת באופן הבא: $f^{M'}(a)=b$ כך ש- (*) מתקיים.

נראה ש- M' מספק את $\Gamma\cup\{\forall x\psi(x,f(x))\}$

<u>$M' \models \Gamma$:</u> $M \models \Gamma$ ו- M, M' מסכימים על σ ולכן $M' \models \Gamma$

<u>$M \models \forall x\psi(x,f(x))$:</u> (בעזרת הלמה שאומרת: רגע של מבנה N, השמה u, ש"ע t, ונוסחה α מתקיים $M,u \models \alpha[t/x] \iff N,u[\bar{v}(t)/y] \models \alpha$ אם t מותר להצבה ב-y ב-α)

במקרה שלנו $t=f(x)$, $u=v[a/x]$, $\alpha = \forall x\,\psi(x,y)$ ...

לכן, נקבל שלכל השמה v: $M,v \models \forall x\,\psi(x,f(x))$

לכן M' מספק את φ ולכן $M \models \varphi$. ∎

<u>משפט סקולם:</u> יש אלגוריתם שבהינתן פסוק φ בונה פסוק אוניברסלי ψ

כך ש- φ ספיק $\iff$ ψ ספיק

משפט הרברנד: תהי Γ קב' פסוקים אוניברסליים (מעל מילון עם סימן קבוע) התנאים הבאים שקולים:

א. Γ ספיקה

ב. Γ ספיקה במבנה הרברנד

ג. $GrIns(\Gamma)$ ספיקה

ד. $GrIns(\Gamma)$ ספיקה במבנה הרברנד.

תרגיל: הוכיחו/הפריכו:

יהי φ פסוק (מעל מילון עם סימן קבוע)

אם φ ספיק, אז יש ל-φ מודל הרברנד.

הטענה לא נכונה. נסתכל

$$\sigma = (R(\cdot), \underbrace{c}_{\text{סימן קבוע יחיד}})$$

קבוצת שמות העצם ללא משתנים מעל σ: $\{c\}$

ולכן לכל מבנה הרברנד H מעל σ, $D^H = \{c^H\}$

נגדיר:

$$\varphi = R(c) \wedge \exists x \neg R(x)$$

(אינו מתאים כפסוק לא אוניברסלי ולכן נבחר שימוש ב-$\exists$)

φ ספיק:

$$M = (\underbrace{\{1,2\}}_{D^M}, \underbrace{\{1\}}_{R^M}, \underbrace{1}_{c^M})$$

אז $M \models \varphi$ $\left(\begin{matrix} 2 \notin R^M \\ 1 \in R^M \end{matrix}\right)$

יהי H מבנה הרברנד

אם $c^H \notin R^H$ אז $H \not\models R(c)$ ולכן $H \not\models \varphi$

אם $c^H \in R^H$ ולכן $D^H = \{c^H\} = \{R^H\}$ ולכן $H \not\models \exists x \neg R(x)$.

ושוב $H \not\models \varphi$.

תרגיל: הוכיחו/הפריכו:

א. אם פסוק ψ נכון בכל מבנה הרברנד, אז הוא תקף. (נכון בכל מבנה)

הפרכה: בדוגמא נגדית: נגדיר $\psi = \neg\varphi$ (מהקודם)

ראינו שלכל מבנה הרברנד H, $H \not\models \varphi$ ולכן $H \models \psi$

אבל $M \not\models \psi$ (M מהדוגמא הקודמת)

ב. אותו דבר אבל עכשיו ψ פסוק "ש" $\psi = \exists x_1 \ldots \exists x_n \alpha$

הטענה נכונה, נראה ש- $\neg\psi$ אינו ספיק.

$\neg\psi$ שקול לפסוק אוניברסלי $\neg\psi$ אינו נכון בגלל מבנה הרברנד ולכן

ממשפט הרברנד $\neg\psi$ אינו ספיק. ■

<u>תרגיל</u>: הוכיחו בעזרת משפט הרברנד שהפסוק הבא תקף:

$$\psi = \forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall x\, R(\varepsilon,\delta,x) \rightarrow \overbrace{\forall\varepsilon\,\forall x\,\exists\delta\, R(\varepsilon,\delta,x)}^{(*)}$$

<u>הוכחה</u>: נראה ש- $\neg\psi$ אינו ספיק. (נתחיל מלמצוא פסוק שקול בצורת PNF.

$$\neg\psi \equiv \forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall x\, R(\varepsilon,\delta,x) \wedge \underbrace{\exists\varepsilon\,\exists x\,\forall\delta\,\neg R(\varepsilon,\delta,x)}_{\text{השלילה של } (*)} \quad (\text{לפי כד})$$

החלפת שמות למשתנים.

$$\equiv \forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall x\, R(\varepsilon,\delta,x) \wedge \exists\varepsilon'\,\exists x'\,\forall\delta'\,\neg R(\varepsilon',\delta',x')$$

$$\equiv \exists\varepsilon'\,\exists x'\,\forall\varepsilon\,\forall\delta'\,\exists\delta\,\forall x\, \big(R(\varepsilon,\delta,x) \wedge \neg R(\varepsilon',\delta',x')\big) = \psi$$

מודגש: הוספה משתנים כי הם מופיעים בנוסחא את f פעמיים תוך שמירת סדר הופעתם של ε,δ,x' ו- ε',δ',x'

$$Sk(\psi) = \forall\varepsilon\,\forall\delta'\,\forall x\,\big(R(\varepsilon,f(\varepsilon,\delta'),x) \wedge \neg R(a,\delta',b)\big) = \psi'$$

(הקיימים הוחלפו בהצבה)

קבוצת ש"ע ללא משתנים:

$a, b, f(a,b), f(a,a) \ldots\ldots$

(נמצא תת קבוצה לא ספיקה של $GrIns(\psi')$)

עבור ההצבה $a/\varepsilon \quad b/\delta' \quad b/x$

$\underline{R(a,f(a,b),b)} \wedge \neg R(a,b,b)$

עבור ההצבה $a/\varepsilon,\ f(a,b)/\delta',\ a/x$

$R(\ldots) \wedge \neg \underline{R(a,f(a,b),b)}$

לא ניתן לספק את $R(a,f(a,b),b)$ ואת שלילתה, לכן $GrIns(\psi')$ אינה ספיקה, וממשפט הרברנד ψ' אינה ספיקה, וממשפט קודם ψ אינה ספיקה.