3.1.17

הרצאה שבוע 10

טענה מהשבוע שעבר: למת ההצבה

$$M,v\left[\bar{v}(t_1)/x_1,\ \dots,\ \bar{v}(t_n)/x_n\right] \models \varphi$$

$\Updownarrow$

$$M,v \models \varphi\left[t_1/x_1,\ \dots,\ t_n/x_n\right]$$

$x_i \neq x_j$

[מוגדר כאשר $t_1,\dots,t_n$ - חסרי משתנים. אחרת, צריך להתייחס לסדר ההצבה]

סקולמיזציה:

נוסחה ב- PNF

$$\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y\, \psi$$

$$Sk(\varphi) = \forall x_1, \dots \forall x_n\, \psi\left[f(x_1,\dots x_n)/y\right]$$

לכל ה- $\exists$ סימן פונקציה חדש f (אם $n=0$ סימן קבוע)

משפט סקולם: φ ספיקה מעל המילון Σ $\Longleftrightarrow$ $Sk(\varphi)$ ספיקה מעל המילון Σ' ($\Sigma' = \Sigma$ + סימני הפונק' והקבוע החדשים שנוספו בסקולמיזציה.)

* האם $Sk(\varphi) \stackrel{?}{\equiv} \varphi$

לא, כי המילונים שונים.

* האם S_K משמרת תקפות? ($\Leftrightarrow$) (טאוטולוגיה)

לא. **דוגמה:**

$$\varphi = \forall x \exists y\left[R(x) \vee \neg R(y)\right]$$

- **משמעות:** לכל x $R(x)$ או שקיים y כך ש- $\neg R(y)$. זו טאוטולוגיה

$$Sk(\varphi) = \forall x\left[R(x) \vee \neg R(f(x))\right]$$ - לא טאוטולוגיה

בדיקת ספיקות: נתונה נוסחה **סגורה** (שאין לה משתנים חופשיים) ב- PNF.

1. סקולמיזציה - קיבלנו נוסחה **אוניברסלית** (יש בה רק כמתי $\forall$) סגורה ב- PNF
2. "קסם" - נוסחאות ללא כמתים ומשתנים.
3. בדיקת ספיקות לנוסחאות חסרות כמתים ומשתנים

דוגמה:

$$\Sigma = (\underbrace{a, b}_{\text{קבוע}},\ \underbrace{f(\,)}_{\text{פונק'}},\ R(\,,\,))$$

$R(a, f(a)) \wedge \neg R(b,a)$ ספיקה?

#

כן (כי אין סופר שלנו - אין סתירה בין שתי הדרישות שלנו)

$$M = (\{0,1,2\}, 0, 1, f^M \text{ (כמו...)}, R^M)$$

$$R^M = \{(0,1)\}$$

אם $(\overset{b}{1},\overset{a}{0})$ לא ניקח כי רוצים לא לספק את
$\neg R(b,a)$

$p_0 \wedge \neg p_0$ ← $\left[\underbrace{\overbrace{R(a,f(a))}^{p_0}}_{T} \wedge \neg \underbrace{\overbrace{R(a,f(a))}^{p_0}}_{F}\right]$ דוגמא

לא ספיקה

<u>למה:</u> יש התאמה מנוסחה φ חסרת משתנים וכמתים לפסוק $\hat{\varphi}$ (בתחשיב הפסוקים), כך ש- φ ספיקה $\Leftrightarrow$ $\hat{\varphi}$ ספיקה.

<u>הוכחה:</u> נשייך לכל נוסחה אטומית $R(t_1,\dots t_n)$ שמופיעה ב-φ איזשהו פסוק אטומי חדש p_i.

$\hat{\varphi}$: נחליף כל נוסחה אטומית ב-φ בפסוק אטומי שמייצג אותה

למשל בדוגמה: $\underbrace{R(a,f(a))}_{p_0} \wedge \neg \underbrace{R(b,a)}_{p_1}$

$p_0 \wedge \neg p_1$

[⇐] אם φ ספיקה אז $\hat{\varphi}$ ספיק:

יהי M מבנה שמספק את φ. נבנה השמה V שתספק את $\hat{\varphi}$.

$$V(p_i) = \begin{cases} T & M \models R(t_1,\dots t_n) \\ F & M \not\models R(t_1,\dots t_n) \end{cases}$$

מוגדר היטב כי אין לו משתנים

p_i ← פסוק אטומי שמייצג את הנוסחה האטומית $R(t_1,\dots t_n)$

<u>טענה:</u> $V \models \hat{\varphi}$ הוכחה. אם אין כאן ניתן T/F באופן שרירותי!

הוכחה באינדוקציה מבנה - לשימוש שבה אומ"ם

$M \models \alpha \Leftrightarrow V \models \hat{\alpha}$ באינדוקציה מבנה על α.

האמת חשוב כי משתמשים בו בהוכחה

[⇒] אם $\hat{\varphi}$ ספיק, אזי φ ספיקה.

תהי V השמה שמספקת את $\hat{\varphi}$.

נבנה מבנה M:

$$D^M = \{t^M \mid t \text{ שלו ללא משתנים (סגור)}\}$$

t^M ← הפירוש של שם העצם t במבנה M.

(#)

בדוגמה:

$$M_1 = (\overbrace{\{a^M, b^M, [f(a)]^M, \dots\}}^{D^{M_1}}, \underbrace{a^M, b^M}, f^M, R^M)$$

סימני קבוע
הפירוש של a ו-b

f^{M_1} הפירוש של סימן הפונק' f:

$$f^{M_1}(\underbrace{t^M}_{\text{הפירוש של שם העצם } t}) = [f(t)]^{M_1}$$

הפירוש של שם העצם $f(t)$

הבנייה: $a^M \neq [f(a)]^{M_1}$, לפי הגדרה,

R^{M_1}: הפירוש ב-M_1 של סימן היחס R

p_0 מייצג את $R(a, f(a))$

$V(p_0) = T$

$$(a^{M_1}, [f(a)]^{M_1}) \in R^{M_1}$$

p_1 מייצג את $R(b,a)$

$V(p_1) = F$

$$(b^{M_1}, a^{M_1}) \notin R^{M_1}$$

כל השאר - באופן שרירותי (לא מעניין אותי).

❋ הערה:
[$a^M \neq [f(a)]^M$
לחשוב על זה כמחרוזות]

פירוש סימני הקבוע והפונק' במילון:

הפירוש של סימן הקבוע c: c^M

הפירוש של סימן פונקציה ה-n מקומי f:

$$f^M(t_1^M, \dots, t_n^M) = [f(t_1, \dots, t_n)]^M$$

M = (עולם, פירושים לסימני קבוע, פירושים לסימני פונק', פירושים לסימני יחס)

נתונה השמה V שמספקת את $\hat{\varphi}$ עבור סימן היחס R, n מקומי.

$$(t_1^M, \dots, t_n^M) \in R^M \iff V(p_i) = T$$

כש-p_i הפסוק האטומי שמייצג את $R(t_1, \dots, t_n)$

לכן: $M \models \varphi$. ההוכחה: באינדוקציה על נוסחה φ,

$V \models \hat{\alpha} \iff M \models \alpha$.

[מקודם: הבסיס: נוסחאות אטומיות נובע מהגדרה.
סגור: לכל הבנאים אומר של קשרים.]

מסק"ל הוכחנו ש- φ ספיקה $\iff$ התרגום של $\hat{\varphi}$ ספיק.

לקבוצת נוסחאות Γ: Γ ספיקה $\iff \hat{\Gamma}=\{\hat{\varphi} \mid \varphi\in\Gamma\}$ ספיקה.

בלי כמתים ומשתנים.

קיבלנו: משפט קומפקטיות לקב' נוסחאות ללא כמתים ומשתנים נובע ממשפט הקומפקטיות לתחשיב הפסוקים.

~~מבנה הרברנד~~: מבנה M שבו הפרוש של שמות עצם סגורים מהווה התאמה חח"ע ועל בין קב' שמות עצם הסגורים והעולם D^M

(1) לכל $d\in D^M$ יש ש"ע סגור t כך ש- $t^M=d$

הפרוש של t ב- M במקום $\bar{v}(t)$

(2) לכל שני ש"ע סגורים $t_1\neq t_2$: $t_1^M\neq t_2^M$

דוגמאות: $\Sigma=(c,f())$

מבנה הרברנד $M_1=\left(\{c^M, f(c)^M, f(f(c))^M \dots\}, c^M, f^M(t)=\boxed{f(t)}^M\right)$

(שמים לב ה-[ ] זרוק)

מבנה הרברנד $M_2=(\mathbb{N}, 0, +1)$

$$[\underbrace{f(f(\dots(c)\dots))}_{n \text{ פעמים}}]^M = n$$

לא מבנה הרברנד $M_3=(\overbrace{\mathbb{N}\cup\{\text{ג'ירפה}\}}^{\text{עולם}}, 0, +1 - \text{למס' הטבעיים, ג'ירפה} \to \text{ג'ירפה})$

סימני קבוע

(הערה*: אם נוסיף ג'ירפה כסימן קבוע זה כן יהיה הרברנד)

לא מבנה הרברנד כי אין ש"ע סגור שלו מתפרש לג'ירפה.

$\Sigma=(c, f(), g())$

$$M_4 = (\mathbb{Z}, 0, +1, -1)$$

לא חח"ע

$c \to 0$

$f(c) \to 1$

$g(f(c)) \to 0$

$g(c) = -1$

$f(g(c)) \to 0$

נקבל שלא חח"ע כי

$$[f(g(c))]^M = [g(f(c))]^M = [c]^M$$

טענה: לכל מילון Σ, אם ב-Σ יש סימן קבוע אז יש מבנה הרברנד.

* אם יש לנו מילון בלי סימן קבוע, נוסיף אחד. מעכשיו והלאה נניח שיש. (לא פוגע בספיקות - ברור)

Ground Instance

דוגמאות:

$\forall x\, R(x)$

כן ? ספיק $R(c_0)$

כן ? ספיק $R(c_1)$ ...

ספיק ? $R(f(c_0))$

⋮

במצב שהנוסחא $\forall x R(x)$ כן ספיקה, נמשיך לנצח

(כי לא נעצור ב"לא")

$\Sigma = (c_0, f(), R())$

$\forall x\, [R(x) \land \neg R(x)]$

$R(c_0) \land \neg R(c_0)$ ספיק ? לא!

$\Downarrow$

$[R(x) \land \neg R(x)]$ לא ספיק.

דוגמא יותר מעניינת:

$\forall x\, [R(x) \land \neg R(f(f(f(c))))]$

ספיק $R(c) \land \neg R(f(f(f(c))))$

ספיק $R(f(c)) \land \neg R(\_\_\_)$

ספיק $R(f(f(c))) \land \neg R(\_\_\_)$

לא ספיק $R(f(f(f(c)))) \land \neg R(f(f(f(c))))$

Ground Instance - ההצבה נוסחה אוניברסלית (רק $\forall$) סגורה

$$\varphi = \forall x_1, \dots \forall x_n \underbrace{\psi}_{\text{חסרת כמתים}}$$

$$GrIns(\varphi) = \{ \psi[t_1/x_1, \dots t_n/x_n] \mid \underbrace{t_1, \dots t_n}_{\text{שמות סגורים}} \}$$

טענה 1: תהי φ נוסחה סגורה אוניברסלית $M \models \varphi$ אמ"מ $M \models GrIns(\varphi)$

הוכחה: נניח ש- $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \underbrace{\psi}_{\text{חסרת כמתים}}$

לכל השמה v וערכים $d_1, \dots, d_n \in D^M$

$$v[d_1/x_1, \dots d_n/x_n] \models \psi$$

נניח בשלילה ש- $\psi[t_1/x_1, \dots t_n/x_n] \in GrIns(\varphi)$

כך ש- M לא מספק אותו

בפרט, $M, v[\bar{v}(t_1)/x_1, \dots \bar{v}(t_n)/x_n] \models \psi$

$\Downarrow$ לפי טענה משיעור שעבר

$$M, v \models \psi[t_1/x_1, \dots t_n/x_n]$$

סתירה.

בהתאם, בדיקת הספיקות של ה- $GrIns(\varphi)$ אם נשתכנע שהם לא ספיקים, אזי לפי טענה 1 φ לא ספיקה.

טענה 2: (לא) נכונה - אבל מה שהיינו חדים)

תהי φ נוסחה סגורה אוניברסלית אם $M \models GrIns(\varphi)$ אז $M \models \varphi$.

דוגמה נגדית:

$$\Sigma = (c, f, R())$$

$M = (\underbrace{\mathbb{N} \cup \{\text{ג'ירפה}\}}_{D^M}, \underbrace{0}_{\text{סימון הקבוע}},$ +1 לטבעיים, ג'ירפה לג'ירפה $, \mathbb{N})$

$\varphi = \forall x R(x)$

$GrIns(\varphi) = \{ R(c), R(f(c)), R(f(f(c))), \ldots \} =$

$= \{ R(f^i(c)) \mid i \geq 0 \}$

$[f^i(c)]^M = i$

$M \models GrIns(\varphi)$ כי לכל i:

$[f^i(c)]^M = i \in \mathbb{N} = R^M$

$M \not\models \varphi$ כי ארפה $\notin R^M \Leftarrow M \not\models \forall x R(x)$

מסקנה ב' (כיוון נכונה):

אם φ סגורה ואוניברסלית, M מבנה הרברנד כך ש- $M \models GrIns(\varphi)$ אז $M \models \varphi$ (אין ארפה ")

הוכחה: נניח בשלילה ש- $M \models GrIns(\varphi)$ אבל $M \not\models \varphi$

$\varphi = \forall x_1, \ldots \forall x_n \underbrace{\psi}_{\text{חסרת כמתים}}$

קיימים $d_1, \ldots d_n \in D^M$

$M, v[d_1/x_1, \ldots d_n/x_n] \not\models \psi$

M הוא מבנה הרברנד $\Leftarrow$ קיימים שמות עצם סגורים $t_1, \ldots t_n$ כך ש-

$t_1^M = d_1$

$\vdots$

$t_n^M = d_n$

$M, v \not\models \underbrace{\psi[t_1/x_1, \ldots t_n/x_n]}_{\in GrIns(\varphi)}$ (בגלל טענה משיעור שעבר) נובע מתכונות ההרכבה בהצבה

וזו סתירה לכך ש- $M \models GrIns(\varphi)$

מסקנה 3: $GrIns(\varphi)$ ספיקה $\Leftrightarrow$ יש לה מבנה הרברנד שמספק את $GrIns(\varphi)$

Scanned by CamScanner

בנינו מבנה כזה כשפתרנו את נוסחאות חסרות משתנים וכמתים.

משפט הרברנד: עבור קבוצה Γ של נוסחאות סגורות אוניברסליות, התנאים הבאים שקולים:

אם יש מבנה הרברנד שמספק אז Γ ספיקה.

(1) Γ ספיקה — טענה 1

(2) $GrIns(\Gamma)$ ספיקה

$$GrIns(\Gamma) = \bigcup_{\psi\in\Gamma} GrIns(\psi)$$

טענה 3

(3) $GrIns(\Gamma)$ מסתפקת במבנה הרברנד כלשהו

(4) Γ מסתפקת במבנה הרברנד כלשהו — טענה 2

איך בודקים ספיקות? Theorem Prover

״מייצר״ את $GrIns(\Gamma)$, ובודק את הספיקות של כל תת קבוצה סופית שלהם.

לפי קומפקטיות, אם $GrIns(\Gamma)$ לא ספיקה, נמצא תת קבוצה סופית של $GrIns(\Gamma)$ שאינה ספיקה

→ מסיקים ש-Γ לא ספיקה.

זהו חצי אלגוריתם שעצירתו מובטחת רק אם Γ אינה ספיקה

⊛ יש ״תתי לוגיקות״ שבהן ניתן להכריע את ספיקות.

דוגמה: אין סימני פונק', רק סימני קבוע, $GrIns$ סופי.

⊛ לפעמים כן ניתן להראות ש-Γ ספיקה.

⊛ משתמשים ב- Proof assistant

משפט הקומפקטיות: לכל קבוצת נוסחאות Γ,

Γ ספיקה $\Longleftrightarrow$ כל תת קבוצה סופית של Γ ספיקה.

⊖ הוכחה בשיעור הבא!

דוג' שימוש בקומפקטיות: תחשיב הפסוקים לא יכול ״לבטא״ קשירות בגרפים.

$\Sigma = (\underbrace{E(\,,\,)}_{\text{קשתות}})$. אין נוסחה φ כך ש- $M \models \varphi \Longleftrightarrow$

M מייצג גרף קשיר. נניח בשלילה, שיש φ כזאת, ונתבונן בקבוצה:

$\Gamma = \{ \psi_i \mid i \geq 0 \}$

$\alpha_i =\ \neg \exists z_1, \dots \exists z_i\ [E(x,z_1) \wedge E(z_1,z_2) \wedge \dots \wedge E(z_i,y)]$ — אין מסלול באורך $i+1$

ה-not סוגר את כל המשפט.

$$\alpha_0 =\ \neg E(x,y)$$

(*) $\Gamma \cup \{\varphi\}$ איננה ספיקה כי מצד קשיר בין כל 2 צמתים יש מסלול באורך סופי כלשהו.

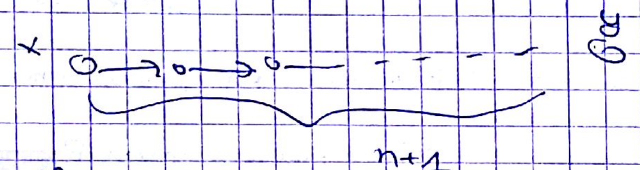
(*) $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ספיקה ממשפט הקומפקטיות.

יהי $\Delta \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$ סופית. ויהי n המקס' כך ש-

$$\exists x \exists y\ \alpha_n \in \Delta$$

אם 0 אז כן ספק.

Δ ספיקה, ניקח גרף עם שני צמתים שמרחקם $n+1$



בגלל גרף קשיר $\Leftarrow$ φ מסתפקת – בין x,y אין מסלול באורך $\geq n$

כל $\alpha_i \in \Delta$ מסתפקת.