27.12

הרצאה שבוע 9

t-נביעה vs v-נביעה:

① נבין את ההבדל בהתחשב היחסים.

דוגמא (נוסחה) $\Gamma \models^t \varphi \not\Leftrightarrow \Gamma \models^v \varphi$

$\Gamma \models^t \varphi$: לכל M,v כך ש- $M,v \models \Gamma$ ⇝ אז $M,v \models \varphi$

$\alpha_t = \forall x \forall y [R(x,y) \to S(x,y)]$

$\Gamma \models^v \varphi$: לכל M אם (לכל השמה v $M,v \models \Gamma$) אז (לכל השמה v $M,v \models \varphi$)

$$\alpha_v = \forall x \left([\forall y\, R(x,y)] \to [\forall y\, S(x,y)] \right)$$

סימן יחס בן מקומי $R(\,,\,)$ "מייצג" $\Gamma \models$

$S(\,,\,)$ " ...... "

$\models \varphi$ "מייצג"

נזכיר יחסים ומקומיים:

$X = M(X)$ מפרש במבנה

$X = V(X)$ מפרש בהשמה

$\alpha_t \models^v \alpha_v$

$\alpha_t \stackrel{!!}{\models^t} \alpha_v$

טענה: (1) $\alpha_t \models^* \alpha_v$

(2) $\alpha_v \not\models^* \alpha_t$

$* \in \{t,v\}$

① יהיו M,v כך ש- $M,v \models \alpha_t$

⇐ לכל $d \in D^M$ ולכל $d' \in D^M$ אם $(d,d') \in R^M$

אז $(d,d') \in S^M$

צ"ל: $M,v \models \alpha_v$

נניח בשלילה ש- $M,v \not\models \alpha_v$ ⇐ קיים $d \in D^M$ כך ש-

$M,v[d/x] \not\models \forall y R(x,y) \to \forall y S(x,y)$

(טבלת T) ⇐ קיים $d \in D^M$:

$M,v[d/x] \models \forall y\, R(x,y)$

וגם

$M,v[d/x] \not\models \forall y\, S(x,y)$

⇐ קיים $d \in D^M$:

$$M,v[d/x, d'/y] \models R(x,y) \Rightarrow (d,d') \in R^M$$

אבל

קיים $d' \in D^M$

$$M,v[d/x, d'/y] \not\models S(x,y) \Rightarrow (d,d') \notin S^M$$

משמעות (d,d') כך ש- $(d,d') \in R^M$ אבל $(d,d') \notin S^M$ בסתירה למה שאמרנו מקודם.

לכל d,d' אם $(d,d') \in R^M$ אז $(d,d') \in S^M$.

② נמצא מבנה M ~~והשמה~~ כך ש-

$M,v \models \alpha_v$

$M,v \not\models \alpha_t$

כי אלה (נוסחאות סגורות - אין משתנים חופשיים אז נבטל את v)

$$M = \left(\mathbb{Z}, \overset{R}{\leq}, \overset{S}{>}\right)$$

משמעות של α_v:

"לכל מס' שלם z, קיים z המספר הקטן ביותר בשלמים ($\forall y\, R(x,y)$) אז z המס' הגדול ביותר בשלמים"

$M \models \alpha_v$ כי אין מס' קטן ביותר בשלמים (ולכן ניתן לומר שזה נכון באופן ריק)

משמעות α_t:

"לכל מס' שלמים w,z אם $w \leq z$ אז $z \leq w$"

$M \not\models \alpha_t$

בוא נוסיף רק ש- $\Gamma \models^z \varphi \not\Leftarrow \Gamma \models^v \varphi$

$\Gamma = \{R(x)\}$

$\varphi = \forall x R(x)$

$\{R(x)\} \models^v \forall x R(x)$: אם $M \models R(x)$ אז לכל השמה v,

$M,v \models R(x)$ ⇐ לכל ערך $d \in D^M$ ולכל השמה u:

$M,u[d/x] \models R(x)$

$\Leftarrow \quad M,u \models \forall x R(x)$ לכל u

$\Leftarrow \quad M \models \forall x R(x)$.

⊙ $\{R(x)\} \not\models^{?} \forall x R(x)$: דוגמא נגדית:

$M = (\underset{\text{תחום}}{\{1,2\}}, \overset{R}{\{1\}})$

השמה: $v(x)=1$

$M,v \models R(x)$ ✓

$M,v \models \forall x R(x)$ ✗

$M,v \not\models \forall x R(x)$

לרוב, נתעניין בנוסחאות <u>סגורות</u>, (נוסחאות ללא משתנים חופשיים), שאז

$\models^{z}$ שקול ל- $\models^{v}$

~~הצבות:~~ <u>מוטיבציה:</u>

(1) $R(x) \land \forall x S(x)$

$\overset{?}{\equiv}$

$R(x) \land \forall y S(y)$

(2) אקסיומה

"אם $\forall x \varphi$ נכון

אז $\varphi[t/x]$ נכון *

(*עבור t חוקיים)"

$\forall x \varphi \to \varphi[t/x]$

$\varphi[t/x]$: * search & replace

רק על משתנים חופשיים של x

$(\forall x\ R(x))\ [f(y)/x]$

$(\forall x\ R(y))\ [x/y] = \forall x\ R(x)$

$\not\models \quad [\forall x R(y)] \to R(x)$

לא נרצה כך

הצבות מותרות: נאמר שש"ע t <u>מותר</u> להצבה במשתנה x בנוסחה φ אם:

(בסיס)

* אם φ נוסחה אטומית תמיד מותר.

בשלב הסגור:

* $\varphi = \alpha \, op \, \beta$: מותר אם מותר ב-α וגם ב-β.
* $\varphi = \neg\alpha$: מותר אם מותר ב-α.
* $\varphi = Q y \alpha$

Q — $\forall$ או $\exists$

שני המקרים היחידים בהם מותר:

① אם $x \notin FV(\varphi)$ אז מותר

② אם $y \notin FV(t)$

ש"ע t (y לא מופיע ב-t בכלל)

וגם t מותר להצבה ב-x ב-α

לסיכום:

ש"ע t מותר להצבה ב-x ב-φ אם ההצבה לא יוצרת מופעים קשורים חדשים

דוגמה:

$$\forall z \, R(\omega)$$

$t = f(z, c_0)$ האם ההצבה של t ב-ω מותרת?

$$\forall z \, R(\omega) \, ?$$

Q	y	φ
$\forall$	z	$R(\omega)$

מקרה ① לא יתכן: כי $\omega \in FV(\forall z \, R(\omega))$

מקרה ② גם לא יתכן: $z \in FV(f(z, c_0))$?

כן $\Leftarrow$ לא מותר.

הצבה: היא פעולה סינטקטית

$$\varphi \rightsquigarrow \varphi[t/x]$$

במישור הסמנטי (משמעות) ניתן להשיג את "אותו האפקט"

ע"י:

$$v\left[{}^{\bar{v}(t)}/_{x}\right]$$

למה: עבור ש"ע: לכל השמה v, ש"ע t משתנה x ושם s

$$\bar{V}\left(S[t/x]\right) = \overline{V\left[\bar{V}(t)/x\right]}(S)$$

<u>דוגמה:</u> $s = f(z,w)$ $\quad t = f(w, c_0)$

$M(N, 1, +)$ <u>השמה V:</u> $V(z)=2, V(w)=3$

$$\bar{V}(s[t/z]) \qquad \overline{V\left[\bar{V}(t)/z\right]}(s)$$

$$\bar{V}(t) = \bar{V}(f(w,c_0)) = 3+1=4$$

$$\bar{V}(s[t/z]) = \bar{V}(f(f(w,c_0), w)) =$$

$$(3+1)+3=7$$

$$\overline{V[4/z]}(f(z,w)) =$$

$$4+3=7$$

"צריך להחליף את z"

[<u>הוכחה:</u> באינדוקציה על מבנה שמות העצם.]

<u>עבור נוסחאות:</u> לכל השמה V, נוסחה φ, ש"ע t ומשתנה x. <u>אם</u> t מותר להצבה במקום x ב-φ אזי:

$$\bar{V}[\varphi[t/x]) = \overline{V\left[\bar{V}(t)/x\right]}(\varphi)$$

הוכחה: באינדוקציה.

[~~התרגיל הבא:~~ הצעד עבור כמתים (ניתן להשתמש בטענה הקודמת) תוך שימוש בכך ש-t מותר להצבה.]

<u>טענה:</u> אם t מותר להצבה ב-x ב-φ אז:

$$\models \forall x\varphi \to \varphi[t/x]$$

$$\left(\forall x R(x) \to R(c_0)\right) \quad \text{~~מקרה פרטי~~:}$$

<u>הוכחה:</u> $\odot$ יהיו M, V מבנה והשמה. אם $M, V \not\models \forall x\varphi$ אז סיימנו ($\to$ TT V $\odot$). אם $M, V \models \forall x\varphi$:

אז לכל $d \in D^M$, $m, V[d/x] \models \varphi$ $\quad$ (*)

צ"ל: $M, v \models \varphi[t/x]$

יהי $d = \bar{v}(t)$

לפי טענת העזר:

$$\bar{v}(\varphi[t/x]) = \overline{v[\bar{v}(t)/x]}(\varphi) =$$

$$= \overline{v[d/x]}(\varphi) = T$$

לפי ⓧ

החלפת שמות למשתנים:

$\forall x\, \varphi$

יהי $y^{\neq x}$ משתנה "חדש" - שאינו מופיע ב-φ.

טענה:

$$\forall y(\varphi[y/x]) \equiv \forall x\, \varphi$$

הוכחה:

$M, v \models \forall x \varphi \iff$ לכל $d \in D^M$: $M, v[d/x] \models \varphi$

$\iff$ לכל $d \in D^M$: $M, v[d/y] \models \varphi[y/x] \iff$ (**)

$\iff M, v \models \forall y(\varphi[y/x])$

הסבר למעבר (**):

$$\overline{v[d/y]}(\varphi[y/x]) = \overline{(v[d/y])[\;/x]}(\varphi) =$$

לפי טענת עזר

$v[x/y](y)$

$$= \overline{v[d/y, d/x]}(\varphi) = \overline{v[d/x]}(\varphi)$$

y לא מופיע ב-φ

משפט: לכל נוסחה יש נוסחה ש-שקולה שבה לאף משתנה

אין מופעים קשורים וגם מופעים חופשיים.

צורה נורמלית PNF

Prenex Normal Form

$Q_1 x_1 Q_2 \ldots Q_n x_n \psi$

$$\alpha_t = \overbrace{\forall x \forall y}^{\text{כמתים}} \ \overbrace{[R(x,y) \to S(x,y)]}^{\text{נוסחה חסרת כמתים}}$$

דוגמא

ב- PNF.

$$\alpha_v = \underline{\forall x} \left[(\underline{\forall y} R(x,y)) \to (\underline{\forall y} S(x,y)) \right]$$

לא ב- PNF (כי הכמתים לא ברצף בהתחלה)

טענה: לכל נוסחה יש נוסחה ξ שקולה ב- PNF.

הפכנו מ- $\to$ ל- $\vee$

$$\forall x \left(\underbrace{\neg \forall y \, R(x,y)}_{\exists y \neg R(x,y)} \vee \forall y \, S(x,y) \right)$$

$$\forall x \left([\exists y \neg R(x,y)] \vee \underbrace{\forall y \, S(x,y)}_{\forall z S(x,z)} \right)$$

$$\forall x \forall z \left((\exists y \neg R(x,y)) \vee S(x,z) \right)$$

אינטואיטיבי! כי z לא מופיע בכלל אפשר להעביר (להוציא) לפני ה- $\forall$

(נוציא $\exists$ כי y לא מופיע)

$$\forall x \forall z \exists y \left(\neg R(x,y) \vee S(x,z) \right)$$

$$\forall x \forall z \exists y \left(R(x,y) \to S(x,z) \right)$$

PNF.

$$T(x) \vee \forall y \, T'(y) \equiv \forall y \, [T(x) \vee T'(y)]$$

כללים למעבר ל- PNF: נניח $\{\neg, \vee, \wedge\}$

* $\neg \forall x \varphi \equiv_t \exists x \neg \varphi$

$\neg \exists x \varphi \equiv_t \forall x \neg \varphi$

* $\forall x \varphi \wedge \forall x \psi \equiv_t \forall x (\varphi \wedge \psi)$

$\forall x \varphi \vee \forall x \psi \not\equiv_t \forall x (\varphi \vee \psi)$

הערה: φ = נוס' כלשהי
ψ - נוס' כלשהי

״כל מה שהוא או זוגי או אי זוגי״ $\not\equiv$ ״כל מה זוגי״ או כל מה אי זוגי

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \overset{z}{\equiv} \exists x\varphi \vee \exists x\psi \quad (*)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \overset{z}{\not\equiv} \exists x\varphi \cap \exists x\psi$$

דוג': φ = מס זוגיים ψ = אי זוגיים

״קיים מס שהוא גם זוגי וגם אי זוגי״ $\not\equiv$ ״קיים מס זוגי וקיים מס אי זוגי״

(*) אם x לא מופיע ב- ψ

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \overset{z}{\equiv} \exists x\varphi \wedge \psi$$

$$\forall x(\varphi \vee \psi) \overset{z}{\equiv} \forall x\varphi \vee \psi$$

$$\exists x\varphi \wedge \exists x\psi$$
$$\equiv$$
$$\exists x\varphi \wedge \exists y\psi' \quad (\psi' = \psi[y/x])$$
$$\equiv$$
$$\exists x(\varphi \wedge \exists y\psi')$$
$$\equiv$$
$$\exists x\exists y(\varphi \wedge \psi')$$

שאלות: האם φ ספיקה? ($\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ איננה טאוטולוגיה)
האם φ טאוטולוגיה?
נניח ש- φ נתונה ב- PNF

$$Q_1x_1Q_2x_2,\dots Q_nx_n\underbrace{\psi}_{\text{חסרת כמתים}}$$

סקולמיזציה: ① נפטר מכל ה- $\exists$ בנוסחה.

<u>משפט סקולם</u>: לכל נוסחה φ מעל מילון Σ קיימת
נוסחה ψ מעל מילון אחר $\Sigma \subseteq \Sigma'$

ψ אוניברסלית: אין בה $\exists$ ומתקיים:
φ ספיקה $\Longleftrightarrow$ ψ ספיקה.

משפט הרברנד

② ״נעשה משהו מעניין עם $\forall$״
רדוקציה מבדיקת ספיקות של
$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \, \psi$$
לנוסחאות ללא כמתים

$$\forall x R(x) \rightsquigarrow R(c_0)$$
$$R(f(c_0))$$

מיוצג הרשימה אינסופית של נוסחאות ללא משתנים וללא כמתים

③ בדיקת ספיקות לנוסחאות ללא כמתים ומשתנים
(כריע)

<u>משפט סקולם</u>: דוגמה: $\exists x R(x)$
$$\exists x R(x) \xrightarrow{\text{סקולמיזציה}} R(c)$$
$R(c)$ כשc-סימן קבוע חדש

דוגמה מורכבת:
$$\forall x \exists y \, R(x,y)$$
מבנה מספרים טבעיים, $<$
$$M = (\mathbb{N}, <)$$
-אין מס' טבעי שגדול <u>מכולם</u> לכן לא ניתן להחליף את y בסימן קבוע
כמו שעשינו קודם.

נכניס סימן פונקציה: $f(\ )$
אינטואיטיבית, f צריכה להחזיר לכל ערך של x, איזשהו ערך
של y ש"טוב" עבורו.

בדוגמא שלנו אפשר לקחת את:
$$f^M(n) = n+1$$

המקרה הכללי:

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \exists y \psi$$

נוסיף סימן פונקציה n-מקומי

f חדש, וניקח את הנוסחה:

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \psi[f(x_1, \dots x_n)/y]$$

בדוגמה שלנו $\forall x \exists y R(x,y)$

נוסיף סימן פונק' חד-מקומי f

$$\forall x R(x, f(x))$$

צ"ל: ψ ספיקה $\iff$ $S_k(\psi)$ הנוסחה שהתקבלה ספיקה.

הוכחה: נניח שנתונים M,v למודל Σ כך ש-

$$M,v \models \forall x_1, \dots \forall x_n \exists y \psi$$

אז לכל $d_1, \dots d_n \in D^M$ יש $e \in D^M$

כך ש- $\circledast$ $M,v[d_1/x_1 \dots d_n/x_n, e/y] \models \psi$

$f^{M'}$

נגדיר פירוש לסימן החדש f:

$f^{M'}(d_1 \dots d_n) = e$ כלשהו כך ש- $\circledast$ מתקיים

נגדיר מבנה M' למודל $\Sigma \cup \{f\}$:

$$M' = (D^M, \underbrace{\quad\quad}_{\text{פירושם ב-}M\text{ לסימנים ב-}\Sigma}, f^{M'})$$

טענה: $M',v \models \forall x_1 \dots \forall x_n \psi[f(x_1, \dots x_n)/y]$

f^{M}

[$\Rightarrow$] $S_k(\varphi)$ ספיקה

יהיו $M, v \models S_k(\varphi)$

ניקח $M' =$ הגבלה של M לסימנים מהמילון המקורי Σ.

<u>טענה:</u> $M', v' \models \varphi$.