הרצאה 7 שבוע 8

תחשיב היחסים

$$\Sigma = (c_0, \_\_\_, f_0, f_1, \_\_\_, R_0, R_1, \_\_\_)$$

שמות עצם: **בסיס:** סימני קבוע מ-Σ

משתנים: x_i

פעולות: סימני פונק' מ-Σ.

נוסחאות: בסיס: $R_i(t_1, \_\_\_, t_n)$

כאשר R_i סימן יחס מ-Σ.

$t_1 \_\_\_ t_n$ ש"ע

פעולות: קשרים: $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$

כמתים: $\exists x \varphi$ $\forall x \varphi$

סדר קדימויות

1. כמתים קודמים לכל
2. קשרים לפי הסדר הרגיל.

דוג': $(\forall x\ R(x)) \wedge R(y)$

נוסחה אחרת:

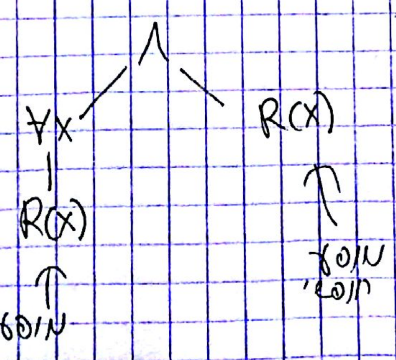
$$\forall x\ (R(x) \wedge R(x))$$

הגדרה: משתנים חופשיים וקשורים.

אינטואיטיבית: (*) $(\forall x\ \underbrace{R(x)}_{\text{קשור}}) \wedge \underbrace{R(x)}_{\text{חופשי}}$

בונים עץ יצירה לנוסחה
משתנה x שלא מופיע מתחת
לכמת $\forall x$ או $\exists x$ הוא חופשי

הסבר:
ל-(*)



<u>הגדרה אינדוקטיבית</u>

<u>בסיס:</u> $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$

FREE VARIABLES — $FV(\varphi) =$ כל המשתנים שמופיעים בנוסחה

<u>צעד:</u> $FV(\alpha \ op\ \beta) = FV(\alpha) \cup FV(\beta)$

op — הקשר הזה לא כמת (לא $\exists, \forall$)

$$FV(\neg \alpha) = FV(\alpha)$$

$$FV(\underset{\exists / \forall}{Q} x\, \alpha) = FV(\alpha) \setminus \{x\}$$

אם x מופיע ב-φ אבל $x \notin FV(\varphi)$ נאמר ש-x קשור ב-φ.

<u>משפט התלות הסופית:</u>

<u>בתחשיב הפסוקים:</u>

אם עבור פסוק α שתי השמות V_1, V_2 מסכימות על כל p_i שמופיע ב-α:

$$\bar{V}_1(\alpha) = \bar{V}_2(\alpha)$$

<u>נרצה משפט אנלוגי לתחשיב היחסים:</u>

$$\forall x\, R(x)$$

"אם השמות V_1, V_2 מסכימות על כל המשתנים ב-$FV(\varphi)$ אזי $\bar{V}_1(\varphi) = \bar{V}_2(\varphi)$."

<u>סמנטיקה של תחשיב היחסים:</u>

$$R(x) \wedge \exists y\, \neg R(y)$$

כדי לפרש נוסחה צריך:

מבנה:
- (*) עולם
- (*) פירוש לסימנים מהמילון: סימני קבוע, סימני פונקציה וסימני יחס.

(*) השמה שמעבירה ערכים על המשתנים.

מבנה עבור מילון Σ:

$$M = (\underbrace{D^M}_{\text{עולם}}, \underbrace{c_0^M, c_1^M, \ldots\ldots}_{\text{פירוש לסימני קבוע מה מילון}}, \underbrace{f_0^M, \ldots}_{\text{פירושים לסימני פונקציה}}, \underbrace{R_0^M, \ldots}_{\text{פירושים לסימני היחס במילון}})$$

$(D^M \neq \emptyset)$

$c_i^M \in D^M$

$f_i^M : (D^M)^n \to D^M$ — f_i n מקומית

$R_i^M \subseteq (D^M)^n$ — n-מקומי

השמה: (עבור מבנה M)

$$V: \{x_i \mid i \in N\} \to D^M$$

דוגמה:

$$\Sigma = (c_0, c_1, \underbrace{f_1(\cdot,\cdot)}_{\text{דו מקומית}}, \underbrace{f_2(\cdot)}_{\text{חד מקומי}}, \underbrace{R(\cdot,\cdot)}_{\text{דו מקומי}})$$

דוגמה למבנים אפשריים עבור מבנה זה!

מבנה 1:

$$M_1 = (\mathbb{N}, \underbrace{0, 1}, \underset{f_1}{+}, \underset{f_2}{+1}, \le)$$

(פרשנו את c_0 ו-c_1 כ-0 ו-1)

מבנה 2:

$$M_2 = (\{0,1\}^+, \text{"0"}, \text{"1"}, \underset{f_1}{\text{שרשור}}, \underset{f_2}{\text{reverse}}, \text{תת מחרוזת})$$

$\{0,1\}^+$ – מחרוזות סופיות מעל 0,1 ...

ערכים במבנה והשמה V M

ש"ע: (לסמן שזה המבנה M)

בסיס:

$$\bar{V}(c_i) = c_i^M$$

$$\bar{V}(x_i) = V(x_i)$$

סגור:

$$\bar{V}(f(t_1 \_\_ t_n)) = f^M(\bar{V}(t_1), \dots \bar{V}(t_n))$$

נוסחאות: **בסיס:**

$$\bar{V}(R(t_1, \_\_ t_n)) = T$$

$$\Updownarrow$$

$$(\bar{V}(t_1), \dots \bar{V}(t_n)) \in R^M$$

סגור: קשרים - כרגיל

$$\bar{V}(\alpha \text{ op } \beta) = TT_{op}(\bar{V}(\alpha), \bar{V}(\beta))$$

$$\bar{V}(\neg\alpha) = TT_{\neg}(\bar{V}(\alpha))$$

$$\forall x\, \alpha$$

כמתים!

$d \in D^M$

x משתנה השמה

השמה מתוקנת:

$$\underbrace{V[d/x]}_{\text{השמה חדשה}}(y) = \begin{cases} d & : \text{if } x = y \\ V(y) & : x \ne y \end{cases}$$

$$\circledast \quad \bar V(\forall x \alpha) = T \iff \text{לכל } d \in D^M:$$

$$V[d/x](\alpha) = T,$$

$$\circledast \quad \bar V(\exists x \alpha) = T \iff \text{קיים } d \in D^M \text{ כך ש-}$$

$$V[d/x]\alpha = T,$$

בצורה:

$$\Sigma = (c_0, c_1, f_1(\,,\,), f_2(\,), R(\,,\,))$$

$$M = (\mathbb{N}, 0, 1, +, +1, \leq)$$

$$\varphi_1 = \overbrace{R(f_1(x,x), y)}^{\alpha} \vee \overbrace{R(f_1(y,y), x)}^{\beta}$$

"פירושו $2x \leq y$

או

$2y \leq x$"

$$\checkmark \quad V_1(x) = 0 \;, \quad V_1(y) = 0$$

$$\times \quad V_2(x) = 2 \;, \quad V_2(y) = 3$$

חישוב ערך האמת עבור $V_2(x)=2,\ V_2(y)=3$

$$\bar V_2(\varphi_1) = TT_\vee(\bar V_2(\alpha), \bar V_2(\beta))$$

$$\bar V_2(\overset{\beta}{\alpha}) = R^M(\bar V_2(f_1(\overset{y}{x}, \overset{y}{x})), \bar V_2(\overset{x}{y})) =$$

$$= [f_1^M(\bar V_2(\overset{y}{x}), \bar V_2(\overset{y}{x})) \overset{?}{\leq} \bar V_2(\overset{x}{y})] =$$

$$= [\overset{3}{2} + \overset{3}{2} \overset{?}{\leq} \overset{2}{3}] = F$$

לכל מס' טבעי n יש מספר שגדול ממנו. (מודל M מתקיים)

(אין צורך לציין ש- $x \neq y-1$ כי זה ברור מכך שזה מודל M)

$$\varphi_2 = \underbrace{\forall x\, [\exists y\, R(f_2(x), y)]}_{\text{אין משתנים חופשיים}}$$

$[*$ במקום $\leq$ נוסיף $+1]$

(אפשר גם $y \leq x$ וגם לא $x \leq y$)

$\Leftarrow$ השמה לא משנה את ערך האמת.

(ראינו ש- $\bar V(\varphi_2) = T$ כאשר V השמה כלשהי!)

$\rightarrow$ לכן אמרנו ש- φ_2 אמיתית

כי הראינו ספציפית למבנה כלשהו אם לא היה

(כי לא מבנה - אלא השמה באופן כללי)

$\bar{V}(\varphi_2) = T$ ⟺ לכל $d_1 \in D^M$ מתקיים

$v[d_1/x](\exists y\, R(f_2(x), y)) = T$ ⟺ לכל $d_1 \in D^M$ קיים $d_2 \in D^M$ כך ש-

$$V' = V[d_1/x,\ d_2/y]\,(R(f_2(x), y)) = T$$

קיצור לזה $(V[d_1/x])[d_2/y]$

⟺ לכל $d_1 \in D^M$ קיים $d_2 \in D^M$ כך ש-

$$\underbrace{\bar{V}'(f_2(x))}_{d_1+1} \le \underbrace{\bar{V}'(y)}_{d_2}$$

⟺ לכל $(d_1 \in D^M)$ $d_1 \in \mathbb{N}$ קיים $d_2 \in \mathbb{N}$ כך ש-
$d_1+1 \le d_2$ נכון.

משפט: אם לכל $x \in FV(\varphi)$ $V_1(x) = V_2(x)$ אז
$\bar{V}_1(\varphi) = \bar{V}_2(\varphi)$ (נכון גם לפ"ס)

מושגים סמנטיים:

1 (*) אם במבנה M, $\bar{V}(\varphi) = T$
נסמן $M, V \models \varphi$

2 (*) אם במבנה M לכל השמה V מתקיים $M, V \models \varphi$,
נסמן $M \models \varphi$.

$\models \varphi$: לכל מבנה M והשמה V $M, V \models \varphi$

(נאמר φ טאוטולוגיה או φ תקפה (truth)) במילים שקולות: לכל מבנה M $M \models \varphi$

v - נביעה (validity) (מושג סמנטי 2 מתמטי)	t - נביעה (מושג סמנטי 1 מתמטי)
$\Gamma \models^v \varphi$: לכל מבנה M והשמה V, אם $M \models \Gamma$ (כלומר לכל $\gamma \in \Gamma$ $M \models \gamma$) אז $M \models \varphi$	$\Gamma \models^t \varphi$: לכל מבנה M והשמה V, אם $M, V \models \Gamma$ (כלומר לכל $\gamma \in \Gamma$ $M, V \models \gamma$) אז $M, V \models \varphi$.

* מה היחס בין $\models^t$ ו- $\models^v$?

אם $\Gamma \models^t \varphi$ אז $\Gamma \models^v \varphi$

הוכחה: נניח ש- $\Gamma \models^t \varphi$. כדי להראות ש- $\Gamma \models^v \varphi$

יהי M מבנה כך ש- $M \models \Gamma$. נראה ש- $M \models \varphi$.

נתון ש- $M \models \Gamma$ לכל השמה v.

$$M, v \models \Gamma \overset{\Gamma \models^t \varphi}{\Longrightarrow}$$

$M, v \models \varphi$ לכל השמה v, כלומר $M \models \varphi$.

$\Gamma \models^v \varphi$: אם במבנה M, כל השמה מספקת את Γ, אז באותו מבנה M כל השמה מספקת את φ.

* אם כן- φ, Γ אין משתנים חופשיים:

$\Gamma \models^t \varphi \iff \Gamma \models^v \varphi$ (השמה לא משחקת תפקיד)

דוגמא ל- φ, Γ כך ש- $\Gamma \models^v \varphi$ אבל $\Gamma \not\models^t \varphi$.

Γ כך ש: * Γ לא v-ספיקה. אין מבנה M כך ש- $M \models \Gamma$

(ואז $\Gamma \models^v \varphi$ לכל φ).

* כן יש מבנה והשמה v כך ש- $M, v \models \Gamma$

(Γ t-ספיקה).

נקח φ t-סתירה. אין מבנה M והשמה v כך ש- $M, v \models \varphi$.

$$\varphi = R(x) \wedge \neg R(x)$$

ניסיון שכמעט עובד:

$\Gamma_1 = \{R(x)\}$ $\qquad$ $\Sigma = (R(\,))$ ← מילון

Γ_1 כן v-ספיקה: נקח מבנה

$$M = (\underset{\text{עולם}}{\{0\}}, \underset{\text{פירוש של היחס}}{\{0\}})$$

$$M = (\mathbb{N}, \mathbb{N})$$

המבנים אלה [illegible]

תיקון: [נגרום שלא כל העולם ביחס]

$$\Gamma_2 = \{R(x), \underbrace{\neg \forall y . R(y)}_{\text{[כמו להגיד מישהו שאינו בעולם..]}}\}$$

① Γ אינה v-ספיקה, כלומר, לכל מבנה M $M \not\models \Gamma$.

יהי M מבנה:

Ⓘ אם $M \not\models \neg\forall y\, R(y)$ אז $M \not\models \Gamma$ וסיימנו.

Ⓘⓘ אם $M \models \neg\forall y\, R(y)$ אז (...) לכן לכל $d \in D^M$ מתקיים $d \in R^M$. יהי d' איבר מ-D^M כך ש-
$d' \notin R^M$

נבנה השמה v כך ש- $v(x) = d'$

$$\bar{v}(R(x)) = F$$

הראנו שקיימת השמה v כך ש- $M, v \not\models \Gamma \Leftarrow M \not\models \Gamma$

② Γ כן t-ספיקה, כלומר קיימים M, v כך ש-
$M, v \models \Gamma$:

$$M = (\{1,2\}, \{1\})$$

$$v(x) = 1$$

מתקיים:

$M, v \models R(x)$ כי $1 \in R^M$

$M, v \models \neg\forall y\, R(y)$ כי עבור $v[2/y]$:

$$M, v[2/y] \not\models R(y)$$

$\underline{\Gamma \models^{v} \varphi}$: אין מבנה M כך ש- $M \models \Gamma \Leftarrow$ באופן ריק.

$\underline{\Gamma \not\models^{t} \varphi}$: עבור M, v שהראינו כך ש- $M, v \models \Gamma$ מתקיים
$M, v \not\models \varphi$

$\underline{\Gamma\ t\text{-ספיקה}}$: קיים מבנה M והשמה v כך ש- $M, v \models \Gamma$.

$\underline{\Gamma\ v\text{-ספיקה}}$: קיים מבנה M כך ש- $M \models \Gamma$

$\underline{v}$	$\underline{t}$
$\underline{\alpha \overset{v}{\equiv} \beta}$:	$\alpha \overset{t}{\equiv} \beta$
אם"ם $\{\alpha\} \models^{v} \beta$ $\{\beta\} \models^{v} \alpha$	אם"ם $\{\alpha\} \models^{t} \beta$ $\{\beta\} \models^{t} \alpha$

טענות:

(1) $\vDash \alpha \leftrightarrow \beta \iff \alpha \stackrel{t}{\equiv} \beta$

הוכחה: (1) $\vDash \alpha \leftrightarrow \beta \iff$ לכל מבנה M והשמה v,

$TT_{\leftrightarrow}(\bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta)) = T \iff$ לכל M ו-v $\bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta)$

$\iff \alpha \stackrel{t}{\equiv} \beta$.

(2) אם $\vDash \varphi$ אז $\vDash \forall x \varphi$ וגם $\vDash \exists x \varphi$.

(3) $\vDash \forall x \varphi$ אז $\vDash \varphi$.

הערה: $\vDash \exists x \varphi \not\Rightarrow \vDash \varphi$.

פעולת הצבה:

$$\forall x R(x) \vee S(x) \rightsquigarrow \forall y R(y) \vee S(x)$$

אקסיומה שנרצה להשתמש:

$$\forall x \varphi \to \underbrace{\varphi[t/x]}$$

φ שבה x הוחלף בש"ע t בכל מופע

הגדרה: עבור נוסחה φ, משתנה x וש"ע t, נגדיר $\varphi[t/x]$:

ש"ע s:

בסיס: $s = c$:

$$c[t/x] = c$$

$s = y$:

אם $x = y$!

$$x[t/x] = t$$

אם $x \neq y$

$$y[t/x] = y$$

סגור:

$$s = f(r_1, \dots, r_n)$$

$$f(r_1, \dots, r_n)[t/x] = f(r_1[t/x], \dots, r_n[t/x])$$

נוסחאות φ:

בסיס:

$$\varphi = R(s_1, \dots, s_n) =$$

$$= R(s_1, \dots, s_n)[t/x] = R(s_1[t/x], \dots, s_n[t/x])$$

סגורה: $\varphi = \alpha \ op\ \beta$

$$(\alpha \ op\ \beta)[t/x] = \alpha[t/x] \ op\ \beta[t/x]$$

$$(\neg\alpha)[t/x] = \neg(\alpha[t/x])$$

$\varphi = Q y \alpha$:

כמת: $\forall$ או $\exists$

אם $x \neq y$:

$$(Q y \alpha)[t/x] = Q y (\alpha[t/x])$$

אם $x = y$:

$$(Q x \alpha)[t/x] \underset{\top}{=} Q x \alpha$$

היינו רוצים להחזיר סוג של exception אבל נחזיר את מה שקיבלנו כחלופה

דוגמאות:

$$t = f(x, y)$$

$$(R(z))[t/z] = (R(f(x,y)))$$

(כי אין w בפנים לא משתנה...) $(R(z))[t/w] = R(z)$

$$(\forall z R(z))[t/z] = \forall z R(z)$$

משתנה הקשור (אין כמ"ב שימנעו מצב זה) $(\forall x R(z))[t/z] = \forall x (R(f(x,y)))$

נוצר מופע קשור של x. כאשר התכוונו למשמעות המקורית.

ש"ע t מותר להצבה:

במשתנה x בנוסחה φ: לא נוצר אף מופע של משתנה קשור שלא היה מלכתחילה

הצבה היא פעולה תחבירית $\equiv$ יש לה מקבילה סמנטית:

$$v[\bar{v}(t)/x]$$