13.12

הרצאה ~~שביעית~~ (הרצאה 7):

~~תזכורת~~ בוחן: לשאלה 1!

הוכחות באינדוקציה מבנה - על איזה מבנה?

$\emptyset \vdash_S \varphi$ באינדוקציה על $Ded_S(\emptyset)$

משפט הקומפקטיות:

הראינו: Γ עקבית $\iff$ Γ ספיקה.

$\leftarrow$ Γ ספיקה $\iff$ כל תת קבוצה סופית של Γ ספיקה.

הלמה של König:

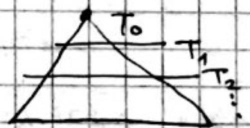
יהא עץ עם קבוצת צמתים אינסופית בת-מניה.

אם לכל צומת יש מספר בנים סופי, אז בעץ יש מסלול אינסופי.

⊖ לכל אורך $n \geq 0$: יש בעץ מסלול באורך n.

סימונים: נניח בה"כ שצמתי העץ הם $\mathbb{N}$ (מותר לנו כי $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ בת מניה) ורק נתנו "שם".

נסמן: T_i - הרמה ה-i של העץ, קבוצת הצמתים שהמרחק שלהם מהשורש הוא i.



כל T_i קבוצה סופית (עובדים באינדוקציה על i)

$\Leftarrow$ בעץ יש אינסוף רמות: לכל i $T_i \neq \emptyset$ [נניח בשלילה שיש T_i ריק אז כל אלו שמתחתיו גם ריקים ואז נקבל ש- $\sum T_i$ סופי בסתירה לאינסופיות העץ.

נרצה לקשר בעיה זו לתחשיב הפסוקים:

נפרש השמה V כקבוצת צמתים בעץ:

$$\{i \mid V(p_i) = T\}$$

נבנה קב' פסוקים Γ כך ש-

$V \models \Gamma \iff$ V מייצג מסלול אינסופי בעץ.

נראה ש- Γ ספיקה, בעזרת הקומפקטיות נקבל שיש השמה V שמייצגת מסלול אינסופי בעץ וסיימנו.

(הוכיחו מסלול!)

הקבוצה Γ:

(1) לכל רמה i יש לכל היותר צומת אחד בקבוצה.

(2)* אם צומת j בקבוצה אז גם האב של j בקבוצה (חוץ מהשורש)

(3) לכל רמה i יש לפחות צומת אחד.

לגבי השורש: נגדיר "האם" של השורש זה השורש (כדי שיתאים להגדרות).

סימון: $s(j)$ - האם של j בעץ.

(1) לכל i: $\alpha_i = \bigwedge_{\substack{j,k\in T_i \\ j\neq k}} (p_j \to \neg p_k)$ — (שקול לרשום ל- $\neg(p_j \wedge p_k)$)

(2) לכל $j\in\mathbb{N}$: $\beta_j = p_j \to p_{s(j)}$

(3) לכל i: $\gamma_i = \bigvee_{j\in T_i} p_j$

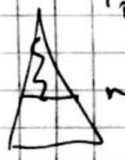
$$\Gamma = \{\alpha_i \mid i\in\mathbb{N}\} \cup \{\beta_j \mid j\in\mathbb{N}\} \cup \{\gamma_i \mid i\in\mathbb{N}\}.$$

(צ"ל: $V\models\Gamma \iff V$ מייצג מסלול אינסופי.)

כדי להוכיח ש- Γ ספיקה מספיק להוכיח, לפי משפט הקומפקטיות, שכל תת-קבוצה סופית שלה היא ספיקה.

תהי $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית.

[בגלל ש Δ סופית היא יכולה להתפרס מקסימום עד רמה n כלשהי



]

יהי n האינדקס המקסימלי כך ש- $\gamma_n\in\Delta$, או $0=n$ אם אין אף $\gamma_i\in\Delta$, n מוגדר היטב כי Δ סופית.

צ"ל: ש- Δ ספיקה. ניקח השמה V שמייצגת מסלול מהשורש ל- $j\in T_n$ כלשהו.

$V\models\alpha_i$: כן (כי לקחתי מסלול - מישהו אחד בכל רמה)

$V\models\beta_j$: כן (כי לקחתי מסלול - אם מישהו בפנים גם אבא שלו בפנים)

לכל $i\le n$: $V\models\gamma_i$.

$\Rightarrow V\models\Delta \Leftarrow \Delta$ ספיקה.

[לסיכום: הראינו שכל תת קבוצה סופית ספיקה $\Leftarrow$ קיבלנו ש- Γ ספיקה, ולכן יש מסלול אינסופי בעץ.]

נניח Γ שמתארת מסלולים אינסופיים.

- האם יש Γ שמתארת מסלולים סופיים בלבד? לא! נוכיח את זה.

~~נסיונות לבנות "תיאור" למסלולים הסופיים~~:

(א) $\neg\Gamma$. אין דבר כזה.. (במקרה שלנו אפילו לא מסלול)

(ב) $\Gamma' = \{\neg\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ (לא תופס דוגמה של סופיים — במקרה שלנו!) גם לא בהכרח מסלול!

Γ' לא מתאר את "ההפך מ-Γ".

<u>סגירות בתחשיב הפסוקים</u>:

. הגדרה הקבוצה Γ הגדירה את קבוצת ההשמות שמתארות מסלולים האינסופיים בגרף

<u>סימון</u>: $Ass(\Gamma) = \{\text{השמה } v \mid v \models \Gamma\}$

$Ass(\Gamma) = \{$ השמה v שמתארת מסלול אין סופי $\}$

מהדוגמה

נאמר שקב' השמות K גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Γ כך ש-

$$K = Ass(\Gamma)$$

קבוצת ההשמות שמתארות מסלול אינסופי היא גדירה.

<u>דוגמאות לקב' השמות גדירות</u>:

(1) $\emptyset$, מוגדרת ע"י $\{p_0 \wedge \neg p_0\}$ סתירה.. או WFF (מכל סתירה) כי מכיל p_0 וגם $\neg p_0$

כי $Ass(\{p_0 \wedge \neg p_0\}) = \emptyset$

(2) קבוצת כל ההשמות: $\{p_0 \vee \neg p_0\}$ טאוטולוגיה , $\emptyset$ (הכל מספק את $\emptyset$.)

(3) השמה יחידה $\{v\}$

$$\{p_i \mid v(p_i)=T\} \cup \{p_i \mid v(p_i)=F\}$$

(4) קבוצת כל ההשמות שנותנות T לכל היותר פסוק אטומי אחד.

$$\{p_i \to \neg p_j \mid i,j \in \mathbb{N},\ i \neq j\}$$

למה קיימת קב' השמות שאינה גדירה? משיקולי ספירה.

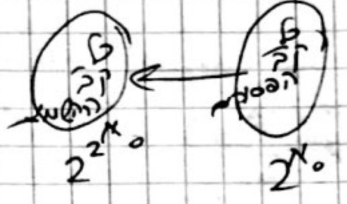
"כמה" קבוצות פסוקים יש?

ספירה: WFF ... $\aleph_0$ (ניתן למנות אותם למשל לפי אורך סדרת גדירה מינימלית)

עוצמת קב' הפסוקים $P(WFF) = 2^{WFF} = 2^{\aleph_0}$

עוצמת קבוצת כל ההשמות: $2^{\aleph_0}$ (מתאימים: $\aleph_1$)

עוצמת קבוצת החזקה של כל ההשמות: $2^{2^{\aleph_0}}$



אין פונקציה על מ- 2^{WFF}

ל- $2^{\text{ההשמות}}$ לכן

יש קבוצת השמות שלא ניתן להגדיר.

<u>דוגמא לקבוצת השמות שאינה גדירה</u>

$$K_{fin} = \{\text{ההשמה שנותנת T למספר סופי של פסוקים אטומיים}\}$$

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה, ש- K_{fin} גדירה

תהי Γ קבוצה כך ש- $Ass(\Gamma) = K_{fin}$

נראה שקיימת השמה $v \notin K_{fin}$ כך ש- $v \models \Gamma$

כלומר $v \in Ass(\Gamma)$ - וזו תהיה סתירה.

תהי v_T ההשמה שנותנת T לכל p_i. (נותנת T לאינסוף דברים) ולכן $v_T \notin K_{fin}$.

נראה ש- $v_T \models \Gamma$ בעזרת הקומפקטיות:

(1) נבנה קבוצה Γ' שמסתפקת רק ב- v_T

(2) נוכיח בעזרת הקומפקטיות ש- $\Gamma' \cup \Gamma$ ספיקה.

(3) נסיק ש- $v_T \models \Gamma$, סתירה.

(1) $\Gamma' = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ מתקיים: $v \models \Gamma' \iff v = v_T$.

(2) לפי משפט הקומפקטיות מספיק להראות שכל תת קבוצה סופית של $\Gamma' \cup \Gamma$ ספיקה. ובכן, תהי $\Delta \subseteq \Gamma' \cup \Gamma$ סופית.

נרשום $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ כך ש- $\Delta_1 \subseteq \Gamma$ ו- $\Delta_2 \subseteq \Gamma'$

נבנה השמה כך ש- $v \models \Delta_1$ וגם $v \models \Delta_2$ ולכן $v \models \Delta$.

Δ_1 "מסתדרים", $\Delta_1 \subseteq \Gamma$ ...

כל השמה שמספקת את Γ מספקת גם Δ_1. לכן נבחר

v מתאים K_{fin}.

Δ_2: $\Delta_2 \subseteq \Pi'$ סופית, יהי n האינדקס המקסימלי של p_i כך ש- $p_j \in \Delta_2$ או 0 אם אין כאלה.

נגדיר:

$$v(p_i) = \begin{cases} T & \text{אם } i \le n \\ F & i > n \end{cases}$$

⊛ $v \in K_{fin} \Rightarrow v \models \Pi \Rightarrow v \models \Delta_1$. $(\Delta_1 \subseteq \Pi)$

⊛ לכל $\alpha \in \Delta_2$, יש $j \le n$ כך ש- $\alpha = p_i$, ו- $v(p_i) = T \Rightarrow v \models \alpha$.

$\Rightarrow v \models \Delta_2$

$v \models \Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta$

(כעת לפי קומפקטיות מסיימים את ההוכחה.)

מה עוד אינו גדיר?

⊛ $K_1 = \{$קבוצת ההשמות שנותנות T בדיוק לפסוק אטומי אחד$\}$

⊛ $K_{inf} = \{$קבוצת ההשמות שנותנות T למס' אינסופי של פסוקים אטומיים$\}$ (אינטואיציה: "צריך לבחור מי מהם ולעשות OR על כולם")

גדירות = אפשר להגדיר קבוצה (אולי אינסופית) ש"תופסת" את ההשמות הרצויות.

גדירות באופן סופי. נאמר ש- K גדירה באופן סופי אם יש Γ סופית כך ש: $Ass(\Gamma) = K$.

דוגמא:

⊛ קבוצת ההשמות שנותנות T ל- p_0. נקח: $\{p_0\}$

משפט: התנאים הבאים שקולים:

(1) K גדירה וגם $\bar{K}$ גדירה.

(2) K גדירה באופן סופי.

(3) K גדירה ע"י קבוצה של פסוק יחיד.

הוכחות:

② ⇐ ③: בהינתן Γ סופית שמגדירה את K גם:

$\{\bigwedge_{\varphi\in\Gamma}\varphi\}$ מגדירה את K.

③ ⇐ ①: נניח ש- K מוגדרת ע"י קבוצה $\Gamma=\{\varphi\}$

($\overline{K}$ קבוצת ההשמות שאינן ב- K) למשל $\{\overline{V_T}\}$ = כל ההשמות שאינן V_T

אז K מוגדרת

$$Ass(\{\neg\varphi\}) = \{v \mid v\models \neg\varphi\} =$$

וגם

$$= \{v \mid v\not\models\varphi\} = \overline{\{v\mid v\models\varphi\}} = \overline{K}$$

לשים לב שפה זה מוגדר כי קבוצה סופית מספיק יחיד גם ¬φ מוגדר היטב

⇐ $\overline{K}$ מוגדרת.

① ⇐ ②: יהיו Γ, Γ' קב' כך ש-

$$Ass(\Gamma)=K$$
$$Ass(\Gamma')=\overline{K}$$

(*) (K ו- $\overline{K}$ לא מסכימות על כלום כי הן ההפך זו של זו)

Γ, Γ' יכולות להיות אינסופיות.

רוצים Δ סופית כך ש- $Ass(\Delta)=K$

נשתמש במשפט הקומפקטיות.

$\emptyset = Ass(\Gamma)\cap Ass(\Gamma')$ (לפי (*))

⇐ $\Gamma\cup\Gamma'$ ספיקה

⇐ לפי הקומפקטיות, קיימת $\Sigma\subseteq\Gamma\cup\Gamma'$ סופית שאינה ספיקה

תהי $\Delta\subseteq\Sigma\cap\Gamma$

טענה: $Ass(\Delta)=K$

$Ass(\Delta)\supseteq K$: כי כל השמה ב- K $\Delta\subseteq\Gamma$

השמה שמספקת את Γ מספקת בפרט את Δ.

$Ass(\Delta)\subseteq K$:

Σ אינה ספיקה $\Sigma = \Delta\cup(\Sigma\cap\Gamma')$

⇐ גם $\Delta\cup\Gamma'$ אינה ספיקה (כי $\Sigma\subseteq\Delta\cup\Gamma'$)

הציור לא מדויק כי Γ ו-Γ' יכולים להכיל פסוקים משותפים

⇐ $\exists$ השמה שמספקת את Δ לא מספקת את Γ', כלומר

$$Ass(\Delta) \subseteq \overline{Ass(\Gamma')} = \overline{F} = \boxed{K}$$

אם מיצי הוא חתול (P_0) וכל חתול הוא בעל 4 רגליים (P_1), אז מיצי בעל ארבע רגליים. (P_2)

לא מבחינים בכמת "לכל" ואת זה שמיצי עצם ספציפי

ניסיון לבטא משפט זה בתחשיב הפסוקים: $P_0 \wedge P_1 \to P_2$

וזה לא טאוטולוגיה ולא תופס את מה שרצינו

תחשיב היחסים / לוגיקה מסדר ראשון

First Order Logic (FOL)

תחביר/סינטקס:

סימנים שבעזרתם ניתן להשתמש בהם:

* סוגריים ()
* קשרים לוגיים $\leftrightarrow, \to, \vee, \wedge, \neg$
* כמתים: $\forall$ לכל

$\exists$ קיים.

* משתנים: $x_0, x_1, \dots$

(נשתמש ב- x, y, z ___)

נוסף: סימני קבוע, יחס ופונק'

⊛ סימני קבוע: $c_0, c_1, \dots$ (ייצג את מיצי למשל בקבוע מתמטי)

⊛ סימני יחס: $R_1, R_2, \dots$

$R_{1,n}$ ← סימן יחס n-מקומי

$R_1(\cdot,\cdot,\cdot)$ ← סימן יחס תלת-מקומי

⊛ סימני פונקציה: $f_1, f_2, f_3, \dots$

$f_{1,n}$ $f_1(\ ,\ ,\ \dots)$

עם הארגומנטים ש-f_1 מקבל

מילון הוא קבוצה של סימני קבוע, יחס ופונק'.

דוגמה:

$$\Sigma = (C_0, R_1(), R_2())$$

"מיפו" "שייכות לקבוצת החתולים" "שייכות לקבוצת 4 רגליים"

(חד מקומיים)

[לצורך הדוגמה מהשיעור הראשון ש max שווה ארגומנט שלם מערך]

$$\Sigma = (C_0, C_1, f_1(\cdot), R_1(\cdot,\cdot), R_2(\cdot,\cdot))$$

"אורך המערך" "max" "המערך" "$\leq$" "$<$"

[הרחבה על הצורה אם מילון נתון]

שמות עצם: קבוצה אינדוקטיבית

בסיס: סימני קבוע מהמילון + משתנים.

פעולות: אם $t_1,\dots t_n$ שמות עצם (ש"ע) מעל המילון, ו- f סימן פונקציה n-מקומי מהמילון אז $f(t_1,\dots t_n)$ ש"ע מעל המילון.

דוגמאות: מעל Σ של מיפו: C_0, x_7

מעל Σ של המערך: $C_0, C_1, f_1(C_0), f_1(f_1(x_7))\dots$

נוסחאות: קבוצה אינדוקטיבית

בסיס: אם $t_1,\dots t_n$ ש"ע מעל המילון, ו- R סימן יחס n-מקומי מהמילון. אז $R(t_1,\dots t_n)$ נוסחה אטומית מעל המילון.

פעולות:

* הפעלת קשרים $\leftrightarrow, \lor, \to, \neg, \land$
* **כמתים:** אם φ נוסחה מעל המילון, אזי $\forall x_i \varphi$, $\exists x_i \varphi$ נוסחאות מעל המילון.

דוגמאות: מעל Σ של מיפו:

(אם מיפו חתול... אז מיפו בעל 4 רגליים...)

$$[R_1(C_0) \land \forall x[R_1(x) \to R_2(x)]] \to R_2(C_0)$$

למיפו יש 4 רגליים

זו נוסחה

"max גבוה שווה לג.. איברי המערך"

$$\forall i\left[R_2(i, c_0) \rightarrow R_1(f(i), c_1)\right]$$

זו לא טאוטולוגיה

לתהליך זה קוראים הדרגה