6/12/11

הרצאה שבוע 6 - (הרצאה #5)

<u>משפט השלמות:</u>

אם $\Gamma \models \varphi$ אז $\Gamma \vdash_{HPC} \varphi$

<u>משפט נוכיח:</u>

אם $\Gamma \nvdash \varphi$ אז $\Gamma \nvDash \varphi$

משפט בסגנון נוכיח: אם $\Gamma \nvdash \varphi$ אז $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ספיקה.
(השמה אומרת ש- $\Gamma \models \neg\varphi$ לכן $\Gamma \nvDash \varphi$)

רוצים השמה V כך ש:

$$V(\alpha) = \begin{cases} T & \Gamma \vdash \alpha \\ F & \Gamma \vdash \neg\alpha \end{cases}$$

<u>(*) הצעה אחרת:</u>

$$\bar{V}(\alpha) = \begin{cases} T & \Gamma \vdash \alpha \\ F & \Gamma \nvdash \alpha \end{cases}$$

<u>בעיות:</u> ① אולי $\Gamma \vdash \alpha$ וגם $\Gamma \vdash \neg\alpha$

כדי להפסיק מבעיה זו הגדרנו מה זו <u>קבוצה עקבית</u>, פוסלת את המקרה הזה.

② אולי $\Gamma \nvdash \alpha$ וגם $\Gamma \nvdash \neg\alpha$

למשל: אם ניקח $\Gamma = \emptyset$. (הצעה אחת (*) מוגדרת על זה "יותר טוב")

כדי לפתור את בעיה ② נגדיר <u>עקביות מקסימלית</u> = (קבוצה שיש לה דעה לגבי הכל)

<u>התכנית להוכחת משפט השלמות:</u>

1. הגדרת קבוצה עקבית
2. תכונות של קב' עקבית
3. הגדרת קב' עקבית מקסימלית
4. תכונות של הנ"ל
5. נגדיר את ההשמה V, ונראה שהיא "עושה מה שרצינו".

Γ <u>קב' עקבית</u> - הגדרות שקולות:

ⓐ קיים פסוק כך ש- $\Gamma \nvdash \alpha$

ⓑ לא קיים פסוק α כך ש- $\Gamma \vdash \alpha$, $\Gamma \vdash \neg\alpha$

(הסימון שעבר)

<u>דוגמאות:</u> $\emptyset, \{p_0\}, \ldots\ldots$

$\emptyset$ עקבית כי למשל $\emptyset \nvdash p_0$ (נאותות)

אין לקבוצה זו "דעה" לגבי p_1 למשל.

אנו רוצים שיהיה לה דעה לגבי כל פסוק.

נצטרך להוסיף פסוקים ל- Γ הנתונה, כך שתהיה לה "דעה על הכל".

<u>תכונות של קבוצה Γ עקבית:</u>

$\Gamma \cup \{\varphi\}$ עקבית

עקבי.

② $\Gamma \nvdash \varphi$ אז $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$ עקבית.

מסקנה מ-1+2 ③ או ש- $\Gamma\cup\{\varphi\}$ עקבית או ש- $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$ עקבית.

④ Γ עקבית $\iff$ כל תת הקבוצה <u>סופית</u> שלה עקבית.

(אם הוספנו אינסוף פסוקים וקלקלנו את העקביות בטוח שיש מקום (סופי) אז נאמר את המקום בו קלקלנו - כלומר הוספנו פסוק שגרם בעקביות וזה ישמש אותנו בהמשך)

(שאלה מש.ב 3)

<u>הוכחה ①:</u> נניח ש- Γ עקבית ו- $\Gamma\vdash\varphi$

צ"ל: $\Gamma\cup\{\varphi\}$ עקבית.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה ש- $\Gamma\cup\{\varphi\}$ ונוכיח שבמקרה זה Γ אינה עקבית.

נראה ש- $\Gamma\vdash\beta$ לכל β:

$\Gamma\cup\{\varphi\}$ לא עקבית $\Rightarrow$ $\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\beta$ $\forall\beta$

$\Rightarrow$ לפי משפט הדדוקציה $\Gamma\vdash\varphi\to\beta$

בנוסף נתון $\underline{\Gamma\vdash\varphi}$

$\Gamma\vdash\beta$ MP

הוכחנו ש- Γ אינה עקבית בסתירה לנתון.

<u>הוכחה ②:</u> נניח ש- $\Gamma\nvdash\varphi$ ו- Γ עקבית.

צ"ל: $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$ עקבית.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה ש- $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$ לא עקבית ונראה ש- $\Gamma\vdash\varphi$ בסתירה לנתון.

$\Gamma\cup\{\neg\varphi\}\vdash\varphi$ כי הנחנו שזו קבוצה לא עקבית.

$\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\varphi$ כי φ הנחה ב- $\Gamma\cup\{\varphi\}$ $\Rightarrow$ דיכוטומיה $\Gamma\vdash\varphi$.

<u>הוכחה ④:</u> Γ עקבית $\iff$ כל תת קבוצה סופית של Γ עקבית.

$[\Leftarrow]$ נניח בשלילה ש- Γ עקבית, אבל קיימת $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית שאינה עקבית.

$\xRightarrow{\text{מהגדרה}}$ $\Delta\vdash p_0$ וגם $\Delta\vdash\neg p_0$

$\xRightarrow{\text{מונוטוניות}}$ $\Gamma\vdash p_0$ וגם $\Gamma\vdash\neg p_0$ בסתירה לעקביות Γ.

$[\Rightarrow]$ נניח, בשלילה ש- Γ אינה עקבית. נראה שקיימת $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית שאינה עקבית.

Γ אינה עקבית $\Rightarrow$ $\Gamma\vdash p_0$ וגם $\Gamma\vdash\neg p_0$!

תהי Δ קבוצת כל ההנחות בסדרת הוכחה ל- p_0 ובסדרת הוכחה ל- $\neg p_0$.

אז $\Delta\vdash p_0$ וגם $\Delta\vdash\neg p_0$ כלומר Δ אינה עקבית.

Δ סופית:

$\Gamma \subseteq \Delta$ כי היא מכילה פסוקים ששימשו כהנחה בהוכחות מ- Γ.

הגדרה: קב' Γ תקרא **עקבית מקסימלית** אם Γ עקבית, ולא קיימת קבוצה עקבית Δ כך ש- $\Gamma \subsetneq \Delta$ (הכלה ממש)

~~אנחנו נראה בסופו של דבר:~~

לכל פסוק φ, או ש- $\Gamma \vdash \varphi$ או ש- $\Gamma \vdash \neg\varphi$

נראה אפילו משהו חזק יותר:

לכל φ $\varphi \in \Gamma$ או $\neg\varphi \in \Gamma$ (גם שייך היא גוררת יכיח והיפך לא נכון) לכן זה יותר חזק.

תכונות של הקבוצה ע"מ (עקביות מקסימליות):

5 אם Δ ע"מ ו- $\Delta \vdash \varphi$ אז $\varphi \in \Delta$.

הוכחה: נניח בשלילה ש- $\varphi \notin \Delta$ אז לפי תכונה 1 (של קב' עקביות) $\Delta \cup \{\varphi\}$ עקבית. אבל:

$$\Delta \subsetneq \Delta \cup \{\varphi\}$$

, סתירה למקסימליות של Δ.

תכונה 6 אם Δ ע"מ אז לכל פסוק φ

$$\varphi \in \Delta \iff \neg\varphi \notin \Delta$$

הוכחה:

[$\Rightarrow$] אם $\varphi \in \Delta$ אז $\neg\varphi \notin \Delta$ כי אחרת: $\Delta \vdash \varphi$ וגם $\Delta \vdash \neg\varphi$ בסתירה לעקביות Δ.

[$\Leftarrow$] נניח בשלילה ש- $\varphi \notin \Delta$ וגם $\neg\varphi \notin \Delta$ לפי תכונה 3 או ש- $\Delta \cup \{\varphi\}$ עקבית או ש- $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ עקבית.

לפי הנחת השלילה Δ מוכלת ממש בשתי הקבוצות הנ"ל, ולכן נקבל סתירה למקסימליות של Δ.

מסקנה מתכונה 6: אם Δ עקבית מקסימלית, לכל פסוק φ, או ש- $\Delta \vdash \varphi$ או ש- $\Delta \vdash \neg\varphi$. (כלומר נפתרה מטרה (1) שהצגנו בתחילת ההרצאה).

טענה: אם Γ עקבית אז קיימת Δ כך ש- $\Gamma \subseteq \Delta$ ו- Δ ע"מ.

הוכחה: נגדיר סדרת קבוצות

$$\Gamma = \Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \dots$$

ניקח מניה של הפסוקים: $\mathbb{N} \to WFF$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots$

הגדרת Δ:

$\Delta_0 = \Gamma$

$$\Delta_{i+1} = \begin{cases} \Delta_i \cup \{\alpha_{i+1}\} & \text{אם } \Delta_i \cup \{\alpha_{i+1}\} \text{ עקבית:} \quad \cancel{\Delta_i \vdash \alpha_{i+1}} \\ \Delta_i \cup \{\neg\alpha_{i+1}\} & \text{אם } \Delta_i \cup \{\alpha_{i+1}\} \text{ לא עקבית:} \quad \cancel{\Delta_i \nvdash \alpha_{i+1}} \end{cases}$$

גם תנאים אלה ... להוכיח שאם ... קודם את φ_0 ... לגבי φ ... נוסיף את φ_0 ... צריך להראות שיירכש ... והמכה. אבל ברגע תנאים אלה נכונים.

נגדיר:

$$\Delta = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i$$

טענה: Δ ע"ע (עקבית מקסימלית)

מקסימליות: לפי הבנייה לכל i, או $\alpha_i \in \Delta$ או ש- $\neg\alpha_i \in \Delta$

נניח בשלילה ש- $\Delta \subsetneq \Delta'$ עקבית. אז קיים $\varphi \in \Delta' \setminus \Delta$

$\varphi = \alpha_j$ עבור j כלשהו.

$\varphi \notin \Delta$ גורר $\alpha_j \notin \Delta \Leftarrow \neg\alpha_j \in \Delta$ (לפי בנייה)

$\Leftarrow \neg\alpha_j \in \Delta'$, סתירה לעקביות של Δ': $\alpha_j \in \Delta' \Rightarrow \Delta' \vdash \alpha_j$

$\neg\alpha_j \in \Delta' \Rightarrow \Delta' \vdash \neg\alpha_j$

עקביות: נניח בשלילה ש- Δ לא עקבית $\overset{\text{תכונה 4}}{\Longleftarrow}$ קיימת $\Delta' \subseteq \Delta$ סופית שאינה עקבית

יהי n האינדקס המקסימלי של α_n כך ש- $\alpha_n \in \Delta'$ או $\neg\alpha_n \in \Delta'$

(קיים n כזה כי Δ' סופית).

$\Delta' \subseteq \Delta_n$ (אם יש הוכחה מ- Δ' אזי יש הוכחה מ- Δ_n, לכן מספיק להוכיח של Δ_n)

נוכיח באינדוקציה על i שכל Δ_i עקבית ונקבל שלא יתכן ש- Δ_n אינה עקבית בסתירה.

הנחתנו כי סף גם ההגדרה הקודמת. אם $\Delta_i \vdash \alpha_{i+1}$ אז בפרט הבא יש תיקון

האינדוקציה: מתכונות 1 ו- 2 (של תת עקבית).

<u>בסיס:</u> $\Delta_0 = \Gamma$ עקבית (נתון)

<u>צעד:</u> נניח ש- Δ_i עקבית,

אם $\Delta_i \vdash \alpha_{i+1}$ $\overset{\text{תכונה 1}}{\Longleftarrow}$ Δ_{i+1} עקבית.

אם $\Delta_i \nvdash \alpha_{i+1}$ $\overset{\text{תכונה 3}}{\Longleftarrow}$ Δ_{i+1} עקבית.

הוכחה ש-Δ עקבי מקסימלי: כמו מקודם אבל:

(*) עקביות נשמרת במעבר מ-Δ_i ל-Δ_{i+1} מתכונה (B)

בהינתן Γ עקבית, ראינו שקיימת $\Gamma \subseteq \Delta$, Δ עקבית מקסימלית.

<u>טענה:</u> אם Δ ע"מ אז Δ ספיקה.

<u>הוכחה:</u> נגדיר השמה v ע"י:

$$v(p_i) = \begin{cases} T & p_i \in \Delta \\ F & p_i \notin \Delta \end{cases}$$

$$v \models \Delta$$

<u>טענת עזר:</u> אם Δ ע"מ אז $\alpha \to \beta \in \Delta$

$\Longleftrightarrow$ $\alpha \notin \Delta$ או $\beta \in \Delta$

(לפי הטבלה אומרת "$\to$" חסרת אינטואיציה,
$F \to$
$\to T$
אסור להסיק עובדות, אנו מתייחסים רק לסינטקס, צריך להוכיח את הקשר הלוגי)

<u>הוכחה:</u>

$[\Longrightarrow]$ נניח ש- $\alpha \to \beta \in \Delta$ אבל

$\alpha \in \Delta$ וגם $\beta \notin \Delta$

$$\text{MP}\begin{cases} \alpha \in \Delta \Longrightarrow \Delta \vdash \alpha \\ \alpha \to \beta \in \Delta \Longrightarrow \Delta \vdash \alpha \to \beta \end{cases} \quad \Delta \vdash \beta$$

ומגדר עקביות מקסימלית תכונה (5) $\Longrightarrow$ $\beta \in \Delta$ סתירה. ■

$[\Longleftarrow]$ נניח ש- $\alpha \notin \Delta$ או $\beta \in \Delta$

<u>מקרה I:</u> $\alpha \notin \Delta$ $\xRightarrow{\text{עקביות מקסימלית}}$ $\neg\alpha \in \Delta$ $\Longrightarrow$ $\Delta \vdash \neg\alpha$

<u>טענה:</u> $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ (הראינו שזה נכון ולא יכיח מהי דוגמה)

$\xRightarrow{\text{מונוטוניות}}$

$$\frac{\Delta \vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)}{\Delta \vdash \alpha \to \beta}\ \text{MP}$$

$\xRightarrow{\text{ע"מ } (5)}$ $\alpha \to \beta \in \Delta$.

<u>מקרה II:</u> $\beta \in \Delta$,

הוכחה מ-Δ:
1. β הנחה
2. $\beta \to (\alpha \to \beta)$ (A1)
3. $\alpha \to \beta$ MP(1,2)

■ . $\alpha \to \beta \in \Delta$ $\Longleftarrow$ $\Delta \vdash \alpha \to \beta$

נכונות האינדוקציה על הפסוקים ב- $WFF_{\{\neg,\to\}}$:

$\alpha\in\Delta \iff V\models\alpha$

(אנו מוכיחים את ⟸ למרות שצריך רק ⟹ כי נצטרך את ⟸ במהלך ההוכחה בכיוון של ¬ (not))

<u>הוכחה:</u>

<u>בסיס:</u> לפי הגדרת V. (הפסוקים שמקבלים T הם בדיוק אלה שב-Δ)

<u>צעד:</u> נניח ש- $\alpha\in\Delta \iff V\models\alpha$

$\beta\in\Delta \iff V\models\beta$

אני לא יודעת אם שייכים ל-Δ אבל מה שמשנה זה - "אמת"

<u>$\neg\alpha$:</u> $V\models\neg\alpha \iff V\not\models\alpha$

פרמטרים כיוון שבגלל "לא נכון"

$\neg\alpha\in\Delta \overset{\Delta\text{ מ"ע}}{\iff} \alpha\notin\Delta \overset{\text{הנחת האינדוקציה}}{\iff}$

<u>$\alpha\to\beta$:</u> $V\models\alpha\to\beta \iff V\not\models\alpha$ או $V\models\beta$

$\overset{\text{ה. האינדוקציה}}{\iff} \alpha\notin\Delta$ או $\beta\in\Delta \iff \alpha\to\beta\in\Delta$.

[הצלחנו להראות קשר "בין החלק הסינטקטי לחלק הלוגי (שבלעדיו הוא משעמם)]

סוף ההוכחה ש-Δ מ"ע ספיקה:

בגלל השמה V והגדרנו ספציפית שלנו $\varphi\in\Delta$, $V\models\varphi \Leftarrow V\models\Delta$

⟸ Δ ספיקה.

<u>הוכחת משפט השלמות:</u>

נתון $\Gamma\not\vdash\alpha \overset{\text{תכונה (2)}}{\Longleftarrow}$ עקביות $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}$ ⟸ (5) משפט לפני אחרון (תיבת לקב' מ"ע)

כך ש- $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\subseteq\Delta$ ⟸ (משפט אחרון) Δ ספיקה ויש השמה

שמספקת את Δ מספקת בפרט את $\Gamma\cup\{\neg\alpha\} \Leftarrow \Gamma\not\models\alpha$

<u>מושגים סמנטיים</u>	<u>מושגים סינטקטיים</u>
$\Gamma\models\alpha$	$\overset{\text{שלמות}}{\Longleftarrow}$ $\Gamma\vdash\alpha$ $\underset{\text{(נאותות)}}{\Longrightarrow}$
$\models\alpha$	$\vdash\alpha$
Δ ספיקה	$\overset{\text{שלמות הראינו}}{\Longrightarrow}$ Δ עקבית $\underset{\text{נאותות}}{\Longleftarrow}$ (*)

<u>נכונות</u> (*) : אם Δ ספיקה, אז Δ עקביות. אחרת $\Delta\vdash p_0$ וגם $\Delta\vdash\neg p_0$

$\overset{\text{מנאותות}}{\Longleftarrow}$ $\Delta\models p_0$ וגם $\Delta\models\neg p_0$. מאחר ש-Δ ספיקה יש

השמה V כך ש- $V\models\Delta$ ובפרט $V\models p_0$ וגם $V\models\neg p_0$

<u>סתירה!</u>

משפט הקומפקטיות:

Γ ספיקה $\iff$ כל תת-קבוצה סופית של Γ ספיקה

(נוכיח בשיעור הבא).