22/11

לוגיקה - הרצאה 4

תחשיב הפסוקים:

תחביר (סינטקס)

ערכי אמת (סמנטיקה)

מערכת הוכחה Hilbert Propositional Calculus (HPC)

הוכחה: מערכת "כללים" שמגדירה מהי הוכחה, סינטקטית לגמרי, שכל המתמטיקה
עובדת נכונה

מהי מערכת הוכחה?

* אקסיומות: "אמיתות בסיסיות"
* כללי היסק.

דוגמא: (כמו) (סיג)

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha\wedge\beta} \qquad \frac{\alpha\wedge\beta}{\alpha} \qquad \frac{\alpha\wedge\beta}{\beta}$$

הוכחה מתוך הנחות:

$Ded_S(\Gamma) =$ (מ- Deduce)

S ← מערכת הוכחה: A אקסיומות, F כללי היסק

Γ ← הנחות, קבוצת פסוקים.

$= X_{\Gamma\cup A, F}$

הוכחה ל- α מתוך הנחות Γ: סדרה סופית ל- α מ- $X_{\Gamma\cup A,F}$.

סימון: אם ניתן להוכיח את α מ- Γ במערכת S, $\Gamma\vdash_S\alpha$ ← סינטקטי

(שונה לחלוטין מ- $\Gamma\vDash\alpha$ ← סמנטי)

דוגמא למערכת הוכחה "לא טובה":

* אקס': כל הטאוטולוגיות
* אין כללי היסק.

אנו נרצה שהאקסיומות יהיו קבוצה קטנה של "תבניות" שקל לבדוק אם
פסוק נתון שייך אליהן.

כנ"ל לגבי כללי היסק.

HPC: לפסוקים מקשרים $\{\overset{not}{\neg}, \to\}$.

אקסיומות: כל הפסוקים מהצורות:

(A1) $\alpha\to(\beta\to\alpha)$

(A2) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma))$

[הוכחנו שבכך שגם אומר
$(A\to(B\to C))\equiv((A\wedge B)\to C)$ תרגול]

(A3) $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

כלל היסק: Modus Ponens (MP)

$$\frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}$$

$\Gamma \vdash_{HPC} \alpha$: α יכיח ב- HPC מהנחות Γ.

אם ברור שמדברים על HPC, נפשט ונכתוב $\Gamma \vdash \alpha$.

תכונות בסיסיות:

① **מונוטוניות:** אם $\Delta \vdash_S \alpha$ ו- $\Delta \subseteq \Gamma$, $\Gamma \vdash_S \alpha$.

② **קומפקטיות:** אם $\Gamma \vdash_S \alpha$ אז קיימת $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית כך ש- $\Delta \vdash_S \alpha$

③ **טרנזיטיביות:** אם $\Delta \vdash_S \alpha$ וגם $\Gamma \vdash_S \delta$ לכל $\delta \in \Delta$, אז $\Gamma \vdash_S \alpha$.

[**הוכחה:** כי אפשר לבנות לכל δ_i סדרת הוכחה] ושרשור זה סדרת הוכחה ל- α.

כלומר

מתוך Γ: δ_1

מתוך Γ: δ_2

$\vdots$

δ_n

סדרת הוכחה ל- α מ- $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$

סדרת הוכחה: ל- φ מ- Γ סדרה $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ כך ש-

① $\varphi_n = \varphi$

② לכל i או ש- φ_i אקסיומה, או ש- $\varphi_i \in \Gamma$ (הנחה), או ש- φ_i מתקבל ע"י הפעלת כלל היסק על פסוקים קודמים בסדרה.

דוגמא: $\vdash_{HPC} \alpha \to \alpha$ (לכל α)

$(\emptyset \vdash_{HPC} \alpha)$ אין הנחות

נראה סדרת הוכחה ל- α→α ללא הנחות:

① $\underbrace{\alpha}_{A} \to (\underbrace{(\alpha \to \alpha)}_{B} \to \underbrace{\alpha}_{C}) \to ((\underbrace{\alpha}_{A} \to \underbrace{(\alpha \to \alpha)}_{B}) \to (\underbrace{\alpha}_{A} \to \underbrace{\alpha}_{C}))$

[נשתמש באקסיומה (A2)]

② $\underbrace{\alpha}_{A}\to(\underbrace{(\alpha\to\alpha)}_{B}\to\underbrace{\alpha}_{C})$ (A1)

③ $(\alpha\to(\alpha\to\alpha))\to(\alpha\to\alpha)$ (MP 2-1 1 se)

④ $\alpha\to(\alpha\to\alpha)$ (A1)

⑤ $\alpha\to\alpha$ MP(3,4).

תזכורת: (סמנטיקה)

$$\models \alpha\to\beta \iff \{\alpha\}\models\beta$$

משפט הדדוקציה

מצפים: אם $\models$ באותה מתכונת עם $\vdash_{HPC}$)

$$\vdash_{HPC} \alpha\to\beta \iff \{\alpha\}\vdash_{HPC}\beta$$

בספציפית, הראינו $\vdash_{HPC}\alpha\to\alpha$ וכן "מצפים" ש- $\{\alpha\}\vdash_{HPC}\alpha$

וזה נכון: (הנחה) α ①

דוגמא: $\{\neg\alpha\}\vdash_{(HPC)}\alpha\to\beta$ (מעכשיו לא נכתוב תמיד HPC אבל הכוונה $\vdash_{HPC}$)

הוכחה:

① $\neg\alpha\to(\neg\beta\to\neg\alpha)$ (A1)

② $\neg\alpha$ (הנחה)

③ $\neg\beta\to\neg\alpha$ MP(1,2)

④ $(\neg\beta\to\neg\alpha)\to(\alpha\to\beta)$ (A3)

⑤ $\alpha\to\beta$ MP(3,4)

היינו רוצים [הוכחה קשה] לבדוק ש- $\vdash \neg\alpha\to(\alpha\to\beta)$ לכל α,β.

משפט הדדוקציה: לכל קבוצת הנחות Γ ופסוקים α,β:

$$\Gamma\vdash_{HPC}\alpha\to\beta \iff \Gamma\cup\{\alpha\}\vdash_{HPC}\beta$$

מסקנה: מכך שראינו ש- $\{\neg\alpha\}\vdash\alpha\to\beta$ אז $\vdash\neg\alpha\to(\alpha\to\beta)$

#

הוכחת משפט הדדוקציה:

[⇒] נניח ש- $\Gamma \vdash \alpha\to\beta$

נראה ש- $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$

נכתוב סדרת הוכחה ל- β מ- $\Gamma\cup\{\alpha\}$

(יודעים שיש כזו) סדרת הוכחה ל- $\alpha\to\beta$ מ- Γ שהיא גם סדרת הוכחה מ- $\Gamma\cup\{\alpha\}$

1. $\alpha\to\beta$
2. α הנחה

β MP (1,2)

[⇐] באינדוקציה על מבנה ההוכחה ב- HPC ל- β מתוך $\Gamma\cup\{\alpha\}$,

התכונה: $\Gamma\vdash_{HPC}\alpha\to\beta$

בסיס: I. β אקסיומה

סדרת הוכחה ל- $\alpha\to\beta$ מתוך Γ:

① $\beta\to(\alpha\to\beta)$ (A1)

② β אקסיומה

③ $\alpha\to\beta$ MP(1,2)

II. β הנחה, $\beta\neq\alpha$ כלומר $\beta\in\Gamma$

אותה סדרת הוכחה מקודם כמו ב- I רק שבשורה מס' ② β הנחה כי $\beta\in\Gamma$

תשוק לצ'ין כאן כי אם $\beta=\alpha$ אנו מקבלים α B

III. $\beta=\alpha$ צ"ל $\vdash\alpha\to\alpha$

כבר ראינו ש- $\vdash\alpha\to\alpha$ ומונוטוניות $\Gamma\vdash\alpha\to\alpha$

(כי אם הוכחנו שפ' כזה ר אז קונזי' אם נניח $\phi=\Delta\subseteq\Gamma$ מתקיים $\Gamma\vdash\alpha\to\alpha$)

צעד: נניח ש- δ,γ מקיימים את התכונה

$\Gamma\vdash_{HPC}\alpha\to\gamma$ וגם $\Gamma\vdash_{HPC}\alpha\to\delta$.

צ"ל: אם χ (קסי) מתקבל מהפעלת MP על δ,γ אז גם χ מקיים את התכונה, כלומר $\Gamma\vdash_{HPC}\alpha\to\chi$.

אם אפשר להפעיל MP על δ,γ אז בה"כ $\delta=(\gamma\to\psi)$ עבור ψ

בשבת, $\chi=\psi$ (תוצאת הפעלת MP על γ ו- $\gamma\to\psi$)

הנחת האינדוקציה

$$\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$$

וגם

$$\Gamma \vdash \alpha \to (\gamma \to \varphi)$$

צ"ל: $\Gamma \vdash \alpha \to \varphi$

$$(\alpha \to (\gamma \to \varphi)) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \varphi)) \quad (A2)$$

סדרת הוכחה מ- Γ שקיימת לפי הנחת האינדוקציה

$\alpha \to (\gamma \to \varphi)$

$(\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \varphi)$ MP

סדרת הוכחה מ- Γ לפי ה.א

$\alpha \to \gamma$

$\alpha \to \varphi$ MP

סדרת הוכחה ל- $\alpha \to \varphi$ מתוך Γ בלבד

$\Downarrow$

$\Gamma \vdash \alpha \to \varphi$

∎

כמסקנה מההוכחה!

כעת נוכל להוכיח את # (2 עמודים קודם)

$\vdash \alpha \to \alpha$

$\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ כי $\{\neg\alpha\} \vdash \alpha \to \beta$ + דדוקציה

טענה: לכל α, β, γ ו- Δ (הנחה)

אם $\Delta \vdash \alpha \to \beta$ (*)

וגם $\Delta \vdash \beta \to \gamma$ (חתק) (*)

אז $\Delta \vdash \alpha \to \gamma$

הוכחה: לפי משפט הדדוקציה מספיק להראות ש- $\Delta \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$

נתון: $\Delta \vdash \alpha \to \beta \overset{\text{לפי משפט הדדוקציה}}{\Longrightarrow} \Delta \cup \{\alpha\} \vdash \beta$

סדרת הוכחה לגמא מתוך $\Delta \cup \{\alpha\}$:

⋮

$\leftarrow$

סדרת הוכחה ל-γ מתוך $\Delta \cup \{\alpha\}$

$\Downarrow$

$\Delta \cup \{\alpha\} \vdash_{HPC} \gamma$

$\Downarrow$ משפט הדדוקציה

$\Delta \vdash \alpha \to \gamma$

סדרת הוכחה ל-β מתוך $\Delta \cup \{\alpha\}$

β ①

סדרת הוכחה ל-$\beta \to \gamma$ מ-Δ שהיא גם סדרת הוכחה מ-$\Delta \cup \{\alpha\}$

$\beta \to \gamma$ ②

γ MP (①,②)

מ-(*) (לאור דרך את α מוסיפים Δ) לכן הפרט תוספת כסדר נקח את ... הסדרה.

מה אנו יודעים עד כה:

משפט הדוקסיומות: (A1-A3)

+

$\vdash \alpha \to \alpha$

$\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ (#)

כי $\{\neg\alpha\} \vdash \alpha \to \beta$

(משפטים על HPC)

משימה:

$\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$ ⇐

משימה: $\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$

לפי משפט הדדוקציה, מספיק להוכיח:

$\{\neg\neg\alpha\} \vdash \alpha$

(#) - $\neg A \to (A \to B)$ (הראינו) ובפרט:

$A = \neg\alpha \quad B = \neg\neg\alpha$ (#)

סדרת הוכחה בלי הנחות

$\neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha)$ (הצבה ב-(#))

$\neg\neg\alpha$ הנחה

$\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha$ MP

$(\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$ (A3)

$\neg\neg\alpha \to \alpha$ MP

α MP

סדרת הוכחה ל-α מ-$\{\neg\neg\alpha\}$

$\Downarrow$

$(\neg\neg\alpha) \vdash \alpha$

$\Downarrow$ משפט דדוקציה

$\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$

טענה: $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$

ובפרט $\vdash \neg\neg A \to A$ $\quad A = \neg\alpha$

$\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$

$(\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \neg\neg\alpha)$ (A3)

$\alpha \to \neg\neg\alpha$ (MP)

Scanned by CamScanner

משפט הדיכוטומיה: (חלוקה למקרים)

לכל Γ, α, β

אם $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$

$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$

אז $\Gamma \vdash \beta$.

סקיצה להוכחה: מראים ש-

$$\vdash_{HPC} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta).$$

ואז נשתמש במשפט הדדוקציה

$$\Gamma \vdash (\alpha \to \beta) \overset{\text{דדוקציה}}{\Longleftarrow} \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$$

$$\Gamma \vdash (\neg\alpha \to \beta) \overset{\text{דדוקציה}}{\Longleftarrow} \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$$

הוכחה מ-Γ

1. $\alpha \to \beta$

הוכחה מ-Γ

2. $\neg\alpha \to \beta$

הוכחה לפי הנ״ל

3. $(\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$
4. $MP(1,3)$
5. β $\quad MP(2,4)$ $\quad$ } 2 הפעלות של MP

* רשום השמה בכל 2 פעמים MP

פעם $MP(1,3)$ MP ואז $MP(4,2)$

שלמות ונאותות HPC:

נאותות: אם $\Gamma \vdash_{HPC} \alpha$ אז $\Gamma \models \alpha$

שלמות: אם $\Gamma \models \alpha$ אז $\Gamma \vdash_{HPC} \alpha$

הוכחת נאותות HPC: באינדוקציה על $Ded_{HPC}(\Gamma)$ (נוכיח את הטענה):

$\Gamma \models \alpha$.

בסיס: ⊛ α אקסיומה: כל האקסיומות הן טאוטולוגיות, כלומר (אוניברסלי) $\models \alpha$. בפרט, לכל השמה V כך ש- $V \models \Gamma$, $V \models \alpha$.

כלומר $\Gamma \models \alpha$.

(*) α הנחה, כלומר $\alpha \in \Gamma$:

אם $v \models \Gamma$ אז v מספקת בפרט את α.

$\Leftarrow$ $\Gamma \models \alpha$.

[הערה: הבסיס: האקסיומות יהיו תקפות של הכתבה, וההנחות יהיו [illegible]]

בדוגמא של שלב בחירת β, γ תמיד נבחר 2 איברים שנוכל להפעיל MP

צעד: יהיו $\beta, \beta \to \gamma$ פסוקים שמקיימים את התכונה:

$$\Gamma \models \beta \quad \text{וגם} \quad \Gamma \models (\beta \to \gamma)$$

צ"ל: γ שהוא תוצאת הפעלת MP על $\beta \to \gamma, \beta$, מקיים את התכונה:

$$\Gamma \models \gamma$$

תהי v השמה כך ש- $v \models \Gamma$

לפי הנחת האינדוקציה: $\Gamma \models \beta \Rightarrow v \models \beta$

$\Gamma \models \beta \to \gamma \Rightarrow v \models \beta \to \gamma$

נסתכל על טבלת האמת של "$\to$":

β	γ	$\to$
T	?	T

לפי $\to$TT $v \models \gamma$.

סוף הוכחת משפט הנאותות.

משפט השלמות:

צ"ל: אם $\Gamma \models \alpha$ אז $\Gamma \vdash_{HPC} \alpha$

נוכיח: אם $\Gamma \nvdash_{HPC} \alpha$ אז $\Gamma \not\models \alpha$.

נרצה למצוא השמה v כך ש-

$v \models \Gamma$ אבל $v \not\models \alpha$

נגדיר השמה v:

$$\bar{v}(\beta) = \begin{cases} T & : \Gamma \vdash_{HPC} \beta \text{ אם} \\ F & : \Gamma \vdash_{HPC} \neg\beta \end{cases}$$

הבעיה עם ה"השמה" הזו: v צריכה להיות מוגדרת עבור פסוקים אטומיים.

אם (1) גם $\Gamma \vdash p_i$ וגם $\Gamma \vdash \neg p_i$ ##

(2) לא $\Gamma \vdash p_i$ ולא $\Gamma \vdash \neg p_i$

לא נבחר איזה ערך אמת לתת ל- p_i.

Scanned by CamScanner

הגדרה: קבוצה Γ נקראת עקבית אם קיים פסוק α

כך ש- $\Gamma \nvdash_{HPC} \alpha$

(אלו הקבוצות שצריך להתמודד איתן במשפט השלמות)

לדוגמא: הקבוצה $\Gamma = WFF_{\{\neg,\to\}}$ אינה עקבית.

מה לגבי $\Gamma = \{p_0, \neg p_0\}$?

טענה: Γ עקבית (1) $\Longleftrightarrow$ (2) לא קיים פסוק α כך ש- $\Gamma \vdash \alpha$ וגם

$\Gamma \vdash \neg\alpha$

הוכחה: לא (1) $\Leftarrow$ לא (2):

אם (1) לא מתקיים $\rightarrow$ ~~לא~~ יש פסוק α. $\Gamma \vdash \alpha$ ובפרט $\Gamma \vdash p_0$

$\Gamma \vdash \neg p_0$

לא (2) $\Rightarrow$ לא (1):

קיים פסוק α רק ש- $\Gamma \vdash \alpha$ וגם $\Gamma \vdash \neg\alpha$ תזכורת - קודם שיכח
נוכיח ש- $\Gamma \vdash \beta$ לכל β.

טענה שהוכחנו קודם שהוכחנו שיכח. :

$\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

$\neg\alpha$

α

β MP×2 (פעמיים MP)

התמודדנו כעת עם (1) בעיה עם ההגדרה בטענה הקודמת למשפט). - כי לא קורה בקבוצות עקביות.

כמו בבעיה (2) מטענה הקודמת למשפט:

למשל מאחר ש- $\vDash \alpha \to \alpha$ אזי $\vdash_{HPC} \alpha \to \alpha$ $\Gamma = \emptyset$

נרחיב את Γ לקבוצה עקבית מקסימלית.

אין שיעור שבוע הבא!