15/11

הרצאה 3 -

מושגים סמנטיים:

① השמה v מספקת פסוק α: $\bar{v}(\alpha)=T$. סימון: $v \models \alpha$

② α ספיק אם קיימת השמה שמספקת את α

③ α סתירה אם לכל השמה v $v \not\models \alpha$

④ α טאוט אם לכל השמה $v \models \alpha$

⑤ שקילות: $\alpha \equiv \beta$ אם לכל השמה v, $\bar{v}(\alpha)=\bar{v}(\beta)$

$(\neg\alpha)\wedge\beta$ אפשר לכתוב $\neg\alpha\wedge\beta$

דוגמאות לשקילות לוגית (מבחינה סינטקטית זה פסוקים שונים)

$\alpha\wedge\beta \equiv \beta\wedge\alpha$

$\alpha\vee\beta \equiv \beta\vee\alpha$

$\neg\neg\alpha \equiv \alpha$

דה מורגן:

$\neg(\alpha\wedge\beta) \equiv \neg\alpha\vee\neg\beta$

$\neg(\alpha\vee\beta) \equiv \neg\alpha\wedge\neg\beta$

דיסטריבוטיביות:

$(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma \equiv (\alpha\vee\gamma)\wedge(\beta\vee\gamma)$

$(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma \equiv (\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$

הוכחת שקילות ע"י טבלת אמת

$\alpha\to(\beta\to\gamma) \equiv (\alpha\wedge\beta)\to\gamma$

בהוכחה ש- $\alpha\to\overset{①}{(\beta\to\gamma)} \equiv \overset{②}{(\alpha\wedge\beta)}\to\gamma$

α	β	γ	①	②
F	F	F	T	T
F	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	F	F
T	T	T	T	T

(טיפ: אפשר לבנות טבלת אם מסתכלים על $\alpha\to\beta$ כ- אם הפסוק α שקר אז β T לכל v)

מושגים סמנטיים עבור קבוצת פסוקים:

תהי Γ קבוצת פסוקים:

⑥ השמה V מספקת את Γ אם לכל $\alpha\in\Gamma$: $V\models\alpha$ (V מספקת את α)

⑦ Γ ספיקה אם קיימת השמה שמספקת את Γ.

⑧ Γ גוררת לוגית פסוק α אם לכל השמה V כך ש- $V\models\Gamma$

סימון: $\Gamma\models\alpha$. (כמו מספקת)

דוגמא: $\{P_0, P_0 \to P_1\} \models P_1$

גרירה לוגית

הוכחה: תהי V השמה כך ש- $V \models \{P_0, P_0 \to P_1\}$, כלומר, $V \models P_0$

וגם $V \models P_0 \to P_1$. צ"ל: $V \models P_1$.

לפי הנתון $\bar{V}(P_0) = T$ $\bar{V}(P_0 \to P_1) = T$

$TT_{\to} \Leftarrow \bar{V}(P_1) = T \to$ במילים אחרות $V \models P_1$.

תכונות של גרירה לוגית

מונוטוניות

① $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ ו- $\Gamma_1 \models \alpha$ אז $\Gamma_2 \models \alpha$.

תהי V השמה כך ש- $V \models \Gamma_2$ אז בפרט, $V \models \Gamma_1$

כי $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ $\Leftarrow$ $V \models \alpha$.

$\Gamma_1 \models \alpha$

② $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ספיקה $\Longleftrightarrow$ $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ ספיק.

לא מוגדר עבור קב' אינסופית. $\leftarrow$

הוכחה: $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ספיקה $\Longleftrightarrow$

יש השמה V כך ש- $V \models \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ $\Longleftrightarrow$

יש השמה V כך שלכל $1 \le i \le n$ $V \models \alpha_i$ $\Longleftrightarrow$ ($TT_{\wedge}$)

יש השמה V כך ש- $V \models \alpha_1 \wedge \alpha_2 \dots \wedge \alpha_i$

(מחקנו סוגריים - סמנטית לא שינינו כלום - לא ישפיע על ערך האמת של הפסוק)

דוגמא: נתבונן בהשמה שנותנת V_F לכל p_i F אז קיימת קבוצה $\Gamma = \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

שמסתפקת אך ורק ב- V_F. אבל לא קיים פסוק שמסתפק אך ורק ב- V_F (אם זה אינסופי (ניתן להפוך ערך ועדיין לספק)

(ממש ל קבוצת פסוקים שהיא אינסופית אבל לפסוק לא)

① אם $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ וגם $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \beta$ אז $\Gamma \models \beta$

(חלוקה למקרים)

הוכחה: תהי V השמה כך ש- $V \models \Gamma$

I. אם $V \models \alpha$ אז $V \models \Gamma \cup \{\alpha\}$ $\Leftarrow$ (גרירה לוגית) $V \models \beta$ ✓

II. אם $V \not\models \alpha$ (לא מסתפק): אז $V \models \neg\alpha$ $\Leftarrow$ $V \models \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ $\leftarrow$

$V \models \beta$.

② אם $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \beta$ וגם $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \neg\beta$ אז $\Gamma \models \alpha$.

(הוכחה בשלילה) **הוכחה:**

(לא אם Γ לא ספיקה אין השמה שמספקת אותה מתקיים באופן ריק)

נניח בשלילה ש- $\Gamma \not\models \alpha$. כלומר, קיימת השמה V כך ש- $V \models \Gamma$ וגם

$V \not\models \alpha$ אז $V \models \neg\alpha$ $\Leftarrow$ $V \models \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$, ...

ואז מהנתון $v\models\beta$ כי $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\models\beta$ וגם

כי $v\models\neg\beta$ כי $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\models\neg\beta$ וזו סתירה

(כי $\Gamma\not\models\alpha$)

③ אם Γ אינה ספיקה אז לכל α, $\Gamma\models\alpha$ כי לא קיימת השמה v כך ש- $v\models\Gamma$. ולכן באופן ריק כל ההשמות שמספקות את Γ מספקות את α

④ "משפט ה- $\to$": $\{\alpha\}\models\beta \iff \models\alpha\to\beta$ (הפסוק הוא טאוטולוגיה)

הערה: $\models\gamma$ (γ טאוטולוגיה) $\overset{\text{שקילות}}{\iff}$ $\emptyset\models\gamma$ כי כל השמה מספקת את $\emptyset$ (הקבוצה הריקה)

$\emptyset\models\gamma$ (כנ"ל)

α	β	$\alpha\to\beta$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

כרואים שהשורה הבעייתית לא קורה.

הוכחה: $\alpha\models\beta$ (תזכורת: אם ה-{} אז זה רק פסוק אחד) $\iff$

לכל השמה v כך ש- $v\models\alpha$ גם $v\models\beta$ $\iff$ לכל השמה v, אם

$\bar v(\alpha)=T$ אז $\bar v(\beta)=T$ $\iff$ לכל השמה v: $v\models\alpha\to\beta$ $\Leftarrow$ $\models\alpha\to\beta$

["משפט $\wedge$": $\alpha\wedge\beta\models\alpha$ וגם $\alpha\wedge\beta\models\beta$]

צורות נורמליות:

① Negation Normal Form (NNF) - ב השלילות על פסוקים אטומיים.

[נראה שכל פסוק ניתן לכתוב כ- NNF למרות שהצלנו]

דוגמא: $\neg(p_0\vee\neg(p_1\wedge\neg p_2))$ (לא ב-NNF כי יש שלילה על פסוק לא אטומי)

נהפוך ל- NNF: } דה-מורגן.

$\neg p_0\wedge\neg(\neg(p_1\wedge\neg p_2))$

שלילה כפולה

$\neg p_0\wedge(p_1\wedge\neg p_2)$ ב- NNF ✓

פורמלית: נגדיר את קבוצת הפסוקים ב- NNF מגדרה אינדוקטיבית:

בסיס: $\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{\neg p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$

פעולות יצירה: $f_\vee, f_\wedge$ (ראינו שעד שלמעט שמערכת $\neg,\vee,\wedge$ היא מערכת שלמה)

משפט: לכל $\alpha\in WFF_{\{\wedge,\vee,\neg\}}$ קיים פסוק שקול ב- NNF $\alpha'\in NNF$ ($\alpha'\equiv\alpha$).

הוכחה: (אפשר אינדוקציה רגילה)

באינדוקציה על מס' הקשרים $\vee,\wedge$ שמופיעים ב- α.

בסיס: ב-α אין $\wedge, \vee$.

$$\alpha = \overbrace{\neg\neg\neg \dots \neg}^{\text{א פעמים not}} p_i$$ (כי אין $\vee, \wedge$) (זה לא ב-NNF כי יש $\neg(\neg..)$)

נגדיר:

$$\alpha' = \begin{cases} p_i & \text{אם א זוגי} \\ \neg p_i & \text{אם א אי-זוגי} \end{cases}$$ ($\alpha' \equiv \alpha$ צ"ל)

צעד: נניח שהטענה נכונה לכל פסוק שיש בו עד m קשרים $\vee, \wedge$. נתבונן בפסוק α עם $m+1$ קשרי $\vee, \wedge$.

$$\alpha = \overbrace{\neg \dots \neg}^{\text{א שלילות}} (\beta \ op \ \gamma)$$ (יש לפחות $\vee / \wedge$ אחד "op" כי $m+1$)

כאשר בעל שפוטמו op קשר $\vee / \wedge$

אזי ב- β, γ יש לכל היותר m קשרי $\vee / \wedge$. (ואפשר להפעיל עליהם את הנחת האינדוקציה).

אם א זוגי $\alpha \equiv \beta \ op \ \gamma$ לפי הנחת האינדוקציה קיימים $\beta', \gamma' \in NNF$ כך ש- $\beta \equiv \beta'$ ו- $\gamma \equiv \gamma'$.

נגדיר $\alpha' = \beta' op \gamma'$ צ"ל $\alpha' \equiv \alpha$ $\alpha' \in NNF$

אם א אי זוגי: $\alpha = \neg(\beta \ op \gamma)$ (נפעיל דה מורגן (ממש כמו בדוגמה בשלב הקודם)

$$\alpha \equiv (\neg\beta) \ \overline{op} \ (\neg\gamma)$$

הקשר ההפוך שאינו op. ($\bar{\wedge} = \vee$, $\bar{\vee} = \wedge$)

[בגלל שהנחנו על מס קשרי $\vee, \wedge$ בלבד נוכל להפעיל את האינדוקציה על $(\neg\beta)$ ו $(\neg\gamma)$

ב- $\neg\beta, \neg\gamma$ יש לכל היותר m קשרי $\vee, \wedge$.

לפי הנחת האינדוקציה יש פסוקים שקולים:
$$\begin{cases} \delta = \neg\beta \\ \varepsilon = \neg\gamma \end{cases}$$ ב-NNF

$\Leftarrow$ $\delta \ \overline{op} \ \varepsilon$ ב-NNF.

② DNF: Disjunctive Normal Form $(\wedge) \vee (\wedge)$

הגדרה אינדוקטיבית:

שכבה ראשונה: conj ($\vee^{m}$ conjuction)

בסיס: $\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

פעולות: $f_\wedge$ (and)

בסיס: Conj

פעולות יצירה: $f_\vee$ (OR)

משפט: לכל פסוק ב- wFF יש פסוק שקול ב- DNF

הערה: בשיעור שעבר, הבניה של פסוק מטבלת אמת.

③ CNF: Conjuctive Normal form

$$(\vee \ \vee \ \vee ..) \wedge (\vee ... \vee) \wedge (...)$$

הגדרה אינדוק': שכבה ראשונה: $\wedge$ Disj (של conj קודם)

הפעולה היא $f_\vee$

שכבה שניה: CNF

בסיס: Disj

פעולה $f_\wedge$

משפט: לכל פסוק ב- wFF יש פסוק שקול ב- CNF

[אפשר להסתכל על טבלת אמת ולבנות בהתאם - כמו שעשינו ב DNF]

הוכחה: מהנתון α נבנה פסוק שקול ב- DNF ל- $\neg\alpha$, נקרא לו β.

$$\neg\beta = \neg\left((\wedge\wedge\wedge)\vee(\wedge\wedge\wedge)...\right)$$

$$\equiv \left((\vee\vee\vee)\wedge(\vee\vee)....\right)$$

דה מורגן

④ הערה: כל פסוק ב- DNF / CNF הוא פסוק ב- NFF.

סמנטיקה של משחק הפסוקים כמשחק:

"מרגיז" "השמה" $\neg p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_2)$ "מפריך"

$\neg p_0$ $\quad$ $p_1 \wedge \neg p_2$

p_1 $\quad$ p_2

משתתפים במשחק:
- "מוכיח"
- "מפריך"

2 שחקנים

מנצח במשחק:
אם $V(p_1) = T$ המוכיח.
אם $V(p_1) \neq T$ המפריך.

$\bar{V}(p_2) = T$

לכן המוכיח מנצח

לדוגמא:

$$\boxed{\begin{array}{l} V(p_0) = T \\ V(p_1) = T \\ V(p_2) = F \end{array}}$$

[פה המוכיח מרוויח כי יש קשר ראשי $\vee$
ואם היה קשר ראשי $\wedge$ המפריך יתחיל ראשון]

הגדרה פורמלית של משחק: (לשני שחקנים)

$$G=(S_0, S_1, t, \sigma, W_0, W_1)$$

S_0 – תורו של שחקן 0
S_1 – תורו של שחקן 1
t – מצב התחלתי/ תחילי
σ – מהלכים חוקיים
W_0, W_1 – מצבים בהם המשחק מסתיים ושחקן 0 או 1 מנצח בהתאמה.

$$S \triangleq S_0 \cup S_1$$

$t \in S$

$\sigma: S \to P(S)$

דוגמא: "המשחק של פסוק α^{ENNF} והשמה v"

S = מצבים = צמתים של עץ היצירה של α כאשר

S_0 (מפריך) = צמתי $\wedge$

S_1 = צמתי $\vee$

t = שורש העץ

σ = הבנים של הצומת.

מפריך W_0 = העלים עלה p_i כך ש- $v(p_i)=F$ או $\neg p_i$ כך ש- $v(p_i)=T$

W_1 = עלה p_i כך ש- $v(p_i)=T$ או $\neg p_i$ כך ש- $v(p_i)=F$

אסטרטגיה עבור שחקן i:

$f_i: S_i \to S$ כך שלכל $s \in S_i$ מתקיים

$$f_i(s) \in \sigma(s)$$

זוג (f_0, f_1) מגדיר ריצה שמתחילה במצב התחלתי t והיא נמשכת לנצח, (אינסופית לא קורה) או מגיעה למצב מנצח עבור אחד השחקנים.

אסטרטגיה מנצחת עבור שחקן i:

תוכל ריצה מול כל אסט' של השחקן השני, שחקן i מנצח.

* לא יתכן ששני השחקנים יש אסטרטגיה מנצחת.

* "יתכן" שלאף שחקן אין אסטרטגיה מנצחת. (אצלינו לא קורה)

(אם ההשמה מספקת אז "המוכיח" ינצח, אם לא אז "המפריך" ינצח)

משפט: לכל פסוק α והשמה v: נסמן ב- $G_{\alpha,v}$ את המשחק שהגדרנו [illegible] (המפריך) יש אסט' מנצחת $\overset{\text{אמ"מ}}{\Longleftrightarrow}$ $v \not\models \alpha$

שחקן 1 יש אסט' מנצחת $\Leftrightarrow$ $V \models \alpha$.
(המוכיח)

(בגלל זה לדרכיות תמיד רק אחד מנצח)
T/F

הוכחה:

[$\Longrightarrow$] באינדוקציה על מבנה α $(\alpha \in NNF)$

בסיס: $\alpha = p_i$ או $\alpha = \neg p_i$

המשחק: המצב ההתחלתי הוא כבר מצב מנצח לאחד השחקנים:

אם $V(\alpha) = T$ אז שחקן 1 מנצח [לשחקן אחד יש אסט' מנצחת - שבה לא עושים כלום]

אם $V(\alpha) = F$ אז שחקן 0 מנצח. [לשחקן 0 יש אסט' מנצחת]

צעד: $\gamma = \alpha \vee \beta$ (אין $\neg$ not כי $\alpha \in NNF$) ($\gamma = \alpha \wedge \beta$ - דומה)

אם $V \models \alpha \vee \beta$: לפי טבלת האמת של OR $TT_\vee$ או ש- $V \models \alpha$ או ש- $V \models \beta$,

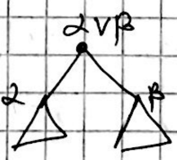
נניח בה"כ ש- $V \models \alpha$. אז נגדיר אסט' מנצחת:

$\boxed{\text{תורו של שחקן 1 ב-} V}$

$$f_1(s) = \begin{cases} \alpha & \text{אם } s = \alpha \vee \beta \text{ (שורש)} \\ f_1'(s) & \text{אחרת} \end{cases}$$

נקח את f_1' להיות אסט' מנצחת על α שקיימת לפי הנחת האינדוקציה.

אם $V \not\models \alpha \vee \beta$ לפי $TT_\vee$ גם $V \not\models \alpha$ וגם $V \not\models \beta$



לפי הנחת האינדוקציה יש אסט' מנצחות f_0^β, f_0^α על α, β בהתאמה.

$$f_0(s) = \begin{cases} f_0^\alpha(s) & \text{בתת העץ של } \alpha \text{ } s \\ f_0^\beta(s) & \text{בתת העץ של } \beta \text{ } s \end{cases}$$

(צ"ל - התקבלה אסט' מנצחת).

[המקרה של $\wedge$ נהפוך את ה- וגם ו- או ובאופן סימטרי]

[$\Longleftarrow$] באינדוקציה על מבנה הפסוקים NNF.

מראים שאם יש אסט' לשחקן 0/1 אז $V \not\models \alpha$ / $V \models \alpha$

דוגמה: $V \models \alpha \wedge \beta$ יש אסט' מנצחת למוכיח