8.11.16

הרצאה ב - לוגיקה

תזכורת שיעור קודם

קבוצה אינדוקטיבית

B - בסיס

F - פעולות יצירה / סגור

$X_{B,F}$ - הקבוצה המינימלית שמכילה את הבסיס B וסגורה תחת הפעולות ב-F.

[מבנים ונושאים שמוגדרים בצורה אינדוקטיבית שלמדנו בקורס: רשימה מקושרת, שפות רגולריות וכו']

כדי להוכיח שייכות ל- $X_{B,F}$: מראים סדרת יצירה

כדי להוכיח אי שייכות: נמצא "תכונה" Y ונוכיח ש- $X_{B,F} \subseteq Y$ באינדוקציה

מראים ש- $Z \notin Y$.

תחשיב הפסוקים:

תחביר (סינטקס): נגדיר את קבוצת הפסוקים החוקיים

WFF = well-formed formulas

כקבוצה אינדוקטיבית.

העולם U: מורכבת מכל הסימנים:

$\underbrace{\{p_1, p_2 \dots\}}_{\text{פסוקים אטומיים}}$ (הכי הבסיסי ביותר)

$\underbrace{\{\cap, \cup, \underset{(not)}{\neg}, \to, \leftrightarrow\}}_{\text{קשרים לוגיים}}$ (not קשר unary, היתר binary קשרים על 2 p_i)

$\underbrace{\{(,)\}}_{\text{סוגריים}}$

WFF: בסיס: פסוקים אטומיים $\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

פעולות יצירה:

$$F = \{f_\cap, f_\cup, f_\neg, f_\to, f_\leftrightarrow\}$$

כאשר $op \in \{\cap, \cup, \to, \leftrightarrow\}$

$$f_{op}(\alpha, \beta) = (\alpha \ op \ \beta)$$

$$f_\neg(\alpha) = (\neg\alpha)$$

דוגמא:

$$(p_1 \to p_2)$$

סדרת יצירה:

1. p_1 בסיס
2. p_2 בסיס
3. $(p_1 \to p_2)$ $f_\to(1,2)$

$(\neg(p_3 \wedge (p_7 \vee p_{11})))$ פסוק חוקי.

$(p_1 \to \wedge p_2)$ לא פסוק חוקי.

$Y_1 :=$ תכונה: אין שני קשרים $\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ שמופיעים מיד אחד אחרי השני. (בינאריים ברצף)

נוכיח ש- $X_{BF} \subseteq Y_1$

בסיס: פסוק אטומי p_i ✓

צעד: נניח ש- α, β מקיימים את התכונה, כלומר אין בהן שתי קשרים בינאריים ברצף

* $f_\neg$: $f_\neg(\alpha) = (\neg\alpha)$ ✓ (מקיים כי $\neg$ לא קשר בינארי ✓)

* f_{op}: עבור $op \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$

$f_{op}(\alpha, \beta) = (\alpha\ op\ \beta)$ ✗

לא ניתן להוכיח שהתכונה מקיימת, יכול להיות ש- α מסתיים בקשר בינארי, ו- β מתחילה בקשר בינארי.

\# נחזור לזה אח"כ

תכונה: Y_2: α הוא פסוק אטומי או מתחיל ב- (ומסתיים ב-).

הוכחה ש- $X_{B,F} \subseteq Y_2$:

בסיס: פסוק אטומי p_i מקיים את Y_2 ✓

צעד: נניח ש- α ו- β מקיימים את Y_2

* $f_\neg(\alpha) = (\neg\alpha)$ ✓ מקיים את Y_2

* $f_{op}(\alpha, \beta) = (\alpha\ op\ \beta)$ ✓ מקיים את Y_2 ✓ $op \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$.

דוגמה:

$p_1 (p_2$

לא פסוק תקין

תיקון להוכחה

\# נוכיח ש- $X_{B,F} \subseteq Y_1 \wedge Y_2$. התכונה החדשה: Y_1 וגם Y_2

בסיס: פסוק אטומי p_1 ✓✓

צעד: נניח ש- α, β מקיימים את התכונה. כלומר, אין בהן 2 קשרים בינאריים ברצף וגם או שהן פסוק אטומי או שהן מתחילים ב- (ומסתיימות ב-).

* $f_\neg$: $f_\neg(\alpha) = (\neg\alpha)$ ✓ Y_1 מתקיים: כי אם היו 2 קשרים בינאריים ברצף הם היו חייבים להיות בתוך α. בסתירה להנחת האינדוקציה.

Y_2 מתקיים: מתחיל ב- (ומסתיים ב-).

⊛ f_{op}: עבור $op\in\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$ Ψ_2: אינו מתקיים

Ψ_1: איפה יכולים להופיע 2 קשרים בינאריים ברצף?

* בתוך α או בתוך β: לא, לפי הנחת האינדוקציה

* $(\alpha$: לא, (אינו קשר בינארי

* $\beta)$ גם לא

* $op\,\alpha$ לא כי לפי Ψ_2 או שהוא פסוק אטומי או שהוא מתחיל ב-(

* $op\,\beta$: לא באופן דומה

$p_1 \to \wedge p_2 \notin WFF$ לא מקיים את Ψ_1 והפסוק: לא מקיים את "Ψ_1 וגם Ψ_2"

$(p_1(p_2)$: לא חוקי

תכונה Ψ_3: ב-α אותו מספר של סוגריים שמאליים וימניים

<u>הוכחה:</u> <u>בסיס:</u> p_i פסוק אטומי, אין סוגריים מכל סוג.

<u>צעד:</u> נניח ש-α ו-β מקיימים את התכונה

* $f_\neg(\alpha) = (\neg\alpha)$

$$\#_(\,((\neg\alpha)) = \underbrace{\#_(\,(\alpha)}\, + 1 \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} 1 + \underbrace{\#_)\,(\alpha)} = \#_)\,((\neg\alpha))$$

* $f_{op}(\alpha,\beta) = (\alpha\, op\, \beta)$ עבור $op\in\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$

$$\#_(\,((\alpha\, op\, \beta)) = \#_(\,\alpha + \#_(\,\beta + 2 \underset{\text{הנחת אינדוקציה}}{=} \#_)\,\alpha + \#_)\,\beta + 2 = \#_)\,((\alpha\, op\, \beta))$$

<u>סימון:</u> WFF_A פסוקים מעל הקשרים ב-A בלבד, למשל:

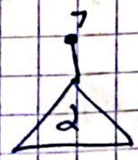
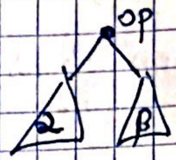
$$WFF_{\{\neg,\vee\}} = X_{\underbrace{\text{פסוקים אטומיים}}_{\text{"B"}},\ \underbrace{\{f_\neg, f_\vee\}}_{\text{"F"}}}$$

($\neg,\vee$ זו קבוצה אוניברסלית אפשר לבטא הכל בעזרתם)

<u>עץ יצירה:</u> משמש הגדרה אינדוקטיבית

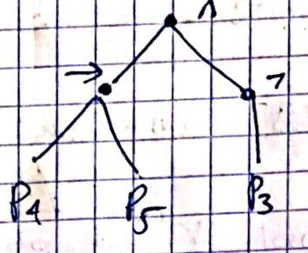
<u>עץ יצירה:</u>   <u>פסוק:</u>

p_i p_i

פסוק	עץ יצירה
$(\neg\alpha)$	
$(\alpha \; op \; \beta)$	

דוגמא:

$((p_1 \to p_5) \wedge (\neg p_3))$



- האם עץ יצירה מוגדר באופן יחיד? כן.

דוגמא:

```
if E then S
if E then S1 else S2

if x>y then
if z>w then explode
else sleep
```

דו משמעות. לאן ה else שייך?
מקרים שבהם יש עץ יחיד.

הוכחה באינדוקציה ← **משפט הקריאה היחידה:** לכל $\alpha \in WFF$ מתקיים: (אחד מהתנאים הבאים)

1. α פסוק אטומי, כלומר $\alpha = p_i$ עבור $i \in \mathbb{N}$ כלשהו.
2. קיים מדויק פסוק יחיד β כך ש- $\alpha = (\neg\beta)$
3. קיים מדויק קשר אחד $op \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ וקיימים β, γ יחידים כך ש- $\alpha = (\beta \; op \; \gamma)$

כללים להשמטת סוגריים: * לא נרשום סוגריים חיצוניים

* סדר קדימויות קשרים: ① $\neg$ קודם לכל ② $\wedge, \vee$ ③ $\to, \leftrightarrow$

~~הערה אסוציאטיביות:~~
~~$(1+2)+3$~~
~~$1+(2+3)$~~

נעסוק בהם בהמשך.

$((\neg p_0) \to (p_1 \cap p_2))$

אסור להשמיט סוגריים! $p_0 \to p_1 \to p_2$

(כי ל- → אין רמת קדימות – לא ברור איך לקרוא)

אסור להשמיט את הסוגריים! $p_1 \wedge (p_3 \to p_7)$
כי אם כן יווצר ביטוי אחר (כי $\wedge$ מוגדר)

פרוצדורה לבדיקה האם מחרוזת α היא פסוק חוקי:

1. האם α פסוק אטומי? כן - חוקי
לא - ממשיכים.

2. האם α מתחיל ב-(ומסתיים ב-)? לא - לא חוקי
כן - מוחקים את הסוגריים החיצוניים

קיבלנו β $\alpha = (\beta)$

לפי משפט הקריאה היחידה

3. אם $\beta = \neg\gamma$, נבדוק בעזרת קריאה רקורסיבית ש-γ חוקי ונחזיר את התשובה.

אחרת:

4. נסרוק משמאל לימין את β, ונעצור בנק' הראשונה שבה מספר ה-(שווה למספר ה-).

אם בנק' זו אין קשר בינארי אז לא חוקי.

אם יש קשר בינארי — מפצלים פה לשתי תתי מחרוזות בעזרת רקורסיה, אם שתיהן חוקיות, ומחזירים "חוקי" $\Leftrightarrow$ שתיהן חוקיות

דוגמא: $\{(p_1 \to p_5) \wedge (\neg p_3)\}$

תוך כדי הבדיקה האם חוקי בעצם קיבלנו את עץ היצירה

מסתיים ב-) ומתחיל ב-(

קשר בינארי

קריאה רקורסיבית

$\{p_1 \to p_5\}$ $\{\neg p_3\}$

p_1 p_5 p_3

סמנטיקה (משמעות) של תחשיב הפסוקים:

ערכי אמת: t (true)
f (false)

$V: \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to \{t,f\}$ השמה - פונק'
Valuation

כלים לחישוב ערך האמת של פסוק - בעזרת <u>טבלאות אמת</u>.

<u>טבלאות אמת</u> - truth table - TT.

(not) $TT_\neg$

f	t
t	f

($\leftrightarrow$) $TT_\leftrightarrow$

ff	t
ft	f
tf	f
tt	t

(and) $TT_\wedge$

ff	f
ft	f
tf	f
tt	t

(OR) $TT_\vee$

ff	f
ft	t
tf	t
tt	t

($\to$) $TT_\to$

ff	t
ft	t
tf	f
tt	t

→ השורה הזו מתקיים

☺ שקר גורר כל דבר

חישוב ערך האמת של פסוק:

נתונה השמה v ; "השמה מורחבת", $\bar{v}$ נותנת ערכי אמת לכל הפסוקים:

$$\bar{v}(p_i) = v(p_i) \quad *$$

$$\bar{v}(\neg\alpha) = TT_\neg(\bar{v}(\alpha)) \quad *$$

$$\bar{v}(\alpha \text{ op } \beta) = TT_{op}(\bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta))$$ עבור $op \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ *

$v: \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to \{t, f\}$

$\bar{v}: WFF \to \{t, f\}$

דוגמא:

$$(p_1 \wedge p_2) \to p_3$$

v	p_1	p_2	p_3
	t	f	t

$$\bar{v}((p_1 \wedge p_2) \to p_3) = TT_\to(\bar{v}(p_1 \wedge p_2), \bar{v}(p_3))$$

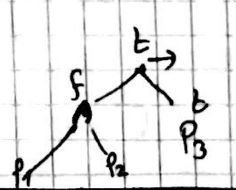
קשר ראשי הוא

$$= TT_\to(TT_\wedge(\bar{v}(p_1), \bar{v}(p_2)), v(p_3))$$

$$= TT_\to(TT_\wedge(t, f), t) =$$

$$= TT_\to(f, t) = t$$

ניתן גם לראות את החישוב בעזרת עץ הגזירה.



סימון: אם $V(\alpha)=t$ נאמר ש-V מספקת את α ונסמן $V\models\alpha$.

שלמות פונקציונאלית:
(לא רשמי)

האם לכל טבלת אמת סופית יש פסוק שמממש אותה?

p_1	p_2	p_3	
|	|	|	t
|	|	|	f
|	|	|	$\vdots$
|	|	|	f

$2^3=8$ שורות

"סופיות":

(*) אם קבוצה אינסופית $p_1, p_2 \dots\dots$

p_1	p_2				
f	f	f	f	$\dots$	t
|					f
|				$\dots$	$\vdots$

f פסוק שמוגדר על מס סופי של משתנים (באורך סופי)

טבלת אמת אינסופית, שאין פסוק (כמובן סופי) שמממש אותה

(מתי אפשר? בהמשך)

הגדרה: קבוצת קשרים A נקראת **שלמה פונקציונאלית** אם לכל טבלת אמת סופית TT קיים פסוק $\alpha\in WFF_A$ שטבלת האמת שלו היא TT.

משפט: $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ היא מערכת שלמה פונקציונאלית

הוכחה: תהי TT טבלת אמת סופית כלשהי

$p_1, \dots, p_n$		
t		t
f		f
$\vdots$		$\vdots$

2^n שורות

נניח בה"כ ש-TT מעל $p_1,\dots,p_n$

איך נבנה את TT?

עבור שורה l בטבלה: l מתארת השמה עבור $p_1,\dots,p_n$ נבנה פסוק α_l

$$\alpha_l = \Big(\bigwedge_{\substack{i:\ p_i \text{ מקבל } t \\ \text{בשורה } l}} p_i\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{i:\ p_i \text{ מקבל } f \\ \text{בשורה } l}} \neg p_i\Big)$$

באופן כזה נייצר 2^n פסוקים, אחד לכל שורה.

צורה נורמלית DNF (or) Disjunctive normal form

$$\alpha = \bigvee_{\substack{l \text{ שורה} \\ TT \text{ מקבל } t \text{ ב}}} \alpha_l$$

* אם כל השורות ב- TT הן f, נגדיר $\alpha = p_0 \wedge \neg p_0$

$\alpha = \bigvee_{\text{שורה } \ell \text{ בה TT נותנת } t} \alpha_\ell$ ⟸ כדי שיוגדר טוב.

מסקנה: המערכת $\{\vee, \wedge, \neg\}$ שלמה פונקציונלית.

[* לפי דה מורגן $\vee\neg$ וגם $\wedge\neg$ שלמות פונקציונלית]
NAND

$\{\leftrightarrow\}$ לא פונק' שלמה. הסבר:

לא ניתן ליצור פסוק שטבלת האמת נראית ככה

p_0	p_1	
t	t	f
t	f	f
f	t	f
f	f	f

"הוכחה": מוכיחים תכונה - כל טבלאות האמת של פסוקים ב- $WFF_{\leftrightarrow}$ הם (.....) [תכונה]
מוכיחים ומראים טבלת אמת שאינה מקיימת אותה.

<u>מושגים סמנטיים:</u>

1) $v \models \alpha$ $\quad \bar{v}(\alpha) = t$

2) α ספיקה (satisfiable) אם קיימת השמה v כך ש- $v \models \alpha$

3) α טאוטולוגיה: אם לכל השמה v, $v \models \alpha$
$\models \alpha$ (כל השמה מספקת - בלי v בסימון).

4) α סתירה: אם לכל השמה v $v \not\models \alpha$.

5) α, β שקולות, נסמן $\alpha \equiv \beta$. (אותן השמות מספקות אותן)
לכל השמה $v \models \alpha \iff v \models \beta$

<u>דוגמא:</u>

1) $\models (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ טאוטולוגיה

<u>הוכחה:</u> טבלת אמת ורואים שתמיד true

α	β	γ	
t	t	f	t
t	f	f	t
t	f	t	t
f	*	*	
*	*	t	

כיסינו את כל השורות

[אפשר לחשב יותר זול מבחינת הטבלה ועולה פחות זמן]

כדי להוכיח ש- α טאוטולוגיה/α סתירה בונים טבלת אמת ורואים שכל השורות t / f בהתאמה.