27.1.17

לוגיקה הרצאה 13

HC

$$MP + (A1)-(A3)$$

אם φ היא טאוטולוגיה מתחשיב הפסוקים ו- ψ היא נוסחה שמתקבלת מהצבת נוסחאות מפסוקים האטומיים. אז $\vdash_{HC} \alpha$ (נבנה את α מ-φ בתחשיב הפסוקים מהוכחה של φ).

(A4) $\forall x\varphi \to \varphi[t/x]$ אם t ניתן להצבה ב- φ

(A5) $\forall x(\varphi\to\psi) \to (\varphi\to\forall x\psi)$ x לא חופשי ב- φ

GEN $\dfrac{\alpha}{\forall x\alpha}$ מותר להסיק מ α את $\forall x\alpha$

דדוקציה: אם אפשר להוכיח מ $\Gamma\cup\{\alpha\}$ את β (*) אז $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$

(*) בהוכחה לא הפעלנו GEN על משתנה שחופשי ב- $\Gamma\cup\{\alpha\}$

כיוון לא מעניין: אם אנחנו יודעים $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$ אז $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$

דיכוטומיה: אם $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ (*) וגם $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\beta$ (*) אז $\Gamma\vdash\beta$

למה (*) נחוצה?

$R(x) \vdash \forall x R(x)$ (מותר לעשות GEN)

$\neg R(x) \vdash \forall x \neg R(x)$

$\alpha\vee\beta = \neg\alpha\to\beta$

$R(x) \vdash \forall x R(x) \vee \forall x\neg R(x)$

$\vdash_{HC} \neg\forall x R(x) \to \forall x\neg R(x)$

$\neg R(x) \vdash_{HC} \neg\forall x R(x) \to \forall x\neg R(x)$

$\Rightarrow$ (דיכוטומיה) $\vdash \neg\forall x R(x) \to \forall x\neg R(x)$

ודאי לא נכון כי זו לא טאוטולוגיה!

(דיכוטומיה) **הוכחה:** דיכוטומיה עם (*)

נניח $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ עם (*) ! $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\beta$ עם (*)

$\Downarrow$ דדוקציה $\Downarrow$

$\Gamma\vdash\alpha\to\beta$ - $\Gamma\vdash\neg\alpha\to\beta$

ומכיוון שהטאוטולוגיה הפסוקית הבאה: $\vdash(\alpha\to\beta)\to((\neg\alpha\to\beta)\to\beta)$

היא טאוטולוגיה פסוקית ← יכיחה.

$\Leftarrow$ $\Gamma\vdash\beta$ מ.ש.ל.

(הכללה הוכחה) **טענה:** אם $\Gamma\vdash\varphi[c/x]$ כ- c סימן קבוע שלא מופיע ב- φ, אז $\Gamma\vdash\forall x\varphi$.

משפט השלמות עבור HC: אם $\Gamma\vDash\varphi$ (נובע סמנטית) אז $\Gamma\vdash_{HC}\varphi$ (אפשר להוכיח)

בהמשך נראה את משפט אי השלמות של גדל, משפט אי השלמות בגלל המספרים הטבעיים. (לא ניתן לקחת מערכת אקסיומות ולהוכיח בה את מה שאפשר להוכיח בטבעיים ויש דברים שנכונים בטבעיים ולא ניתן להוכיח מתוך שטענה)

גדל הוכיח את המשפט

רעיון ההוכחה של משפט השלמות: אם $\Gamma\nvdash_{HC}\varphi$ אז $\Gamma\nvDash\varphi$ כלומר $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$ עקבית וקיים מודל M שמספק אותה.

(φ נוסחה סגורה)

בה"כ $T \nvdash \varphi$ נומר קיים מבנה M כך ש $M \models T$ (כל ההשמות) אבל $T \nvdash \varphi \Rightarrow$ יש השמה שלא מספקת את φ אז יש השמה v ומבנה M כך ש $M, v \models \neg\varphi$.

$T \nvdash \varphi \Leftarrow T$ עקבית (הגדרת קבוצה עקבית), ($T \cup \{\neg\varphi\}$ עקבית).
וזה להראות ש T ספיקה. (מהיותה עקבית)

עזר נרחיב לקבוצה עקבית מקסימלית - Σ (מיזון) שלמה.
וכל פסוק $\sigma \in \Sigma$ $T \vdash \sigma$ או $T \vdash \neg\sigma$.
במקרה זה יש סגורים $t_1, \dots, t_n$ וסימני יחס R מתקיים:

$$R(t_1, \dots, t_n) \in T \quad OR \quad \neg R(t_1, \dots, t_n) \in T$$

ניקח מבנה הרברנד ונפרש סימני יחס כמו ש T מכריחה.

בעיה 1: נרחיב לקבוצה Σ שלמה (כל פעם נפעל את פותח R האיבריק ונבדוק האם לקחת אותו או זאת המניעה שלנו כדי לשמור R עקביות).

נ"ל $T = \{\neg\forall x R(x)\}$ $\neg\forall x R(x) \equiv \exists x R(x)$ לכל t שם סגור אנחנו אומרים נקבל $R(t)$ והמבנה לא יספק את $\exists x \neg R(x)$
פתרון: נוסיף סימן קבוע חדש:

פתרון: נוסיף סימן קבוע חדש C_φ לכל φ מהצורה $\neg\forall x\psi$.
ונוסיף את הנוסחה: $\neg\forall x \psi \rightarrow \neg\psi[C_0/x]$

נרחיב לשלמה ונוסיף עדים וכך הלאה...
ניקח איחוד (אינסופי) על הכל ונקבל קבוצה עקבית, שלמה ועם עדים $\leftarrow$ מבנה הרברנד.

השלמה

משפט אי השלמות של גדל

אחי יש קבוצה הנחות שאפשר להסיק ממנה ב HC "מטפיק" גבעות של
המספרים הטבעיים: (1) עוקב (2) כפל
(3) חיבור (4) קטנה אופס
אז קיים פסוק φ כך ש $T \nvdash \varphi$ וגם $T \nvdash \neg\varphi$

קיים הפסוק φ שנסיון להוכיח בטבעיים $M \models \varphi$ אבל לא ניתן להוכיח מ- T
$[M = (\mathbb{N}, 0, 1, +, *)]$

PA

הקבוצה 0.
$$\begin{cases} \forall x (x + 0 = \ ) \\ \forall x (x * 0 = 0) \\ \forall x (S(x) \neq 0) \end{cases}$$

אנחנו בטוחים לגבי שפונקצית העוקב היא חח"ע: $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$

חיבור אסוציאטיבי: $\forall x \forall y ((x + S(y)) = S(x + y))$

ו כפל דיסטי': $\forall x \forall y ((x * S(y)) = x * y + x)$

האינדוקציה מה שמקנה שהמספר הבא

אינסוף אקסיומות: לכל φ עם משתנה חופשי יחיד:
$\varphi(0) \wedge \forall x [\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x))] \rightarrow \forall x \varphi(x)$

יהי פונקציה $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ נוסחה φ מייצגת את f לכל $n_1, \dots, n_k, m$
$PA \vdash \varphi(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k, \bar{m})$
$f(n_1, \dots, n_k) \neq m$ $PA \vdash \neg\varphi(\dots)$
$S^n(0) = \bar{n}$

תרגיל ייצוג הפונקציה $f(n) \begin{cases} n-1 & n>0 \\ 0 & n=0 \end{cases}$

(ייצוג הפונקציה $y=x-1$) $\varphi(x,y) = (x=0 \wedge y=0) \vee (S(y) = x)$

אפשר להראות שאם f היא פונקציה ב- RE אז f ניתנת לייצוג ב- PA.

$\text{provable}(\ulcorner\varphi\urcorner)$: קיימת הוכחה ל- φ ב- PA.

מספר שמייצג את φ

הפסוק גדל: $PA \vdash \varphi \leftrightarrow \neg Prf(\ulcorner\varphi\urcorner)$

φ נכונה אמ"מ לא ניתן להוכיח ב PA את φ (self reference)

דוגמא: "המשפט הזה משקר" מופיע לפי עצמו במרכאות אינו יכוח!

$PA \nvdash \varphi$ וגם $PA \nvdash \neg\varphi$

מה עושים עם לוגיקה?

- אימות תוכנה
- proof compexity - אפשר לקבל חסמים תחתונים בסיבוכיות מעגלים